

УДК 539.3

Б. Окрепкий, канд. техн. наук; М. Шелестовська, канд. техн. наук

Тернопільський національний економічний університет

## ОСЕСИМЕТРИЧНА ТЕМПЕРАТУРНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМИ ТІЛ ЦИЛІНДР–ШАР ПРИ НЕІДЕАЛЬНОМУ ТЕПЛОВОМУ КОНТАКТІ

**Резюме.** Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр – шар при неідеальному тепловому контакті між циліндром та шаром у випадку ізотропних матеріалів. Отримано формули для визначення температурних полів при різних варіантах температурних умов на бічних поверхнях циліндра і шару. Досліджено вплив контактної провідності на розподіл температурних полів у зоні контакту двох тіл.

**Ключові слова:** осесиметрична температурна задача, ізотропні матеріали, циліндр–шар, неідеальний тепловий контакт.

B. Okrepkiy, M. Shelestovska

## AXES-SYMMETRIC TEMPERATURE TASK FOR THE BODY SYSTEM CYLINDER-LAYER UNDER NON-IDEAL HEAT CONTACT

**The summary.** The solution of the axes-symmetric temperature task for the body system cylinder-layer under non-ideal heat contact between a cylinder and a layer in the case of isotropy materials have been found. Formula for determination of temperature fields under different temperatures on the side surfaces of a cylinder and a layer have been obtained. The influence of the contact conductivity on the distribution of the temperature fields in the area of two bodies contact has been investigated.

**Key words:** axes-symmetric temperature, isotropy materials, cylinder-layer, non-ideal contact.

**Постановка проблеми.** Визначення контактних деформацій і напружень, з урахуванням температурних полів, є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи. Тому визначення температурного поля для системи тіл циліндр–шар при неідеальному тепловому контакті є необхідним для знаходження напруженого стану контактуючих тіл.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл досліджується в багатьох працях [1-4]. Зокрема в роботах [3, 4] розв'язані осесиметричні температурні задачі для системи тіл циліндр–півпростір при неідеальному тепловому контакті для ізотропних і трансверсально-ізотропних матеріалів. Проте недостатньо вивченим є вплив умов неідеального теплового контакту на величину і характер температури в системі тіл циліндр–шар.

**Мета роботи.** Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи тіл циліндр–шар для ізотропних матеріалів із урахуванням неідеального теплового контакту. Знайти формули для визначення температури в циліндрі і шарі, а також дослідити вплив контактної провідності на розподіл температурних полів у зоні контакту.

**Постановка задачі.** Нехай круговий циліндр радіусом  $R$  і довжиною  $L$  знаходиться в неідеальному тепловому контакті з шаром скінченної товщини  $H$ . Матеріали тіл є ізотропними. На вільному торці циліндра задана постійна температура  $T_0$ , а бічна поверхня циліндра теплоізолювана. На вільних поверхнях шару здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем за законом Ньютона. При зроблених припущеннях необхідно визначити температурні поля в циліндрі та шарі.

Введемо циліндричну систему координат  $r, \theta, z$ , центр якої лежить на поверхні шару, а вісь  $Oz$  спрямована вздовж осі циліндра. Всі величини, позначені індексом «1», відносяться до шару, без індексів – до циліндра.

Граничні умови для температури матимуть вигляд:

$$T = T_0 \quad (z = L; 0 \leq r < R), \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (r = R, 0 \leq z \leq L), \quad (2)$$

$$\lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} = \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = h_0 (T - T^1) \quad (z = 0, 0 \leq r < R), \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_2^1 T^1 = 0 \quad (z = 0; R \leq r < \infty), \quad (4)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} - H_1^1 T^1 = 0 \quad (z = -H; 0 \leq r < \infty), \quad (5)$$

де  $H_1^1, H_2^1, \lambda_z, \lambda_z^1$  – коефіцієнти теплообміну і теплопровідності;  $h_0$  – контактна провідність.

**Розв'язування краєвої задачі для рівняння теплопровідності.** Відомо [5], що в осесиметричному випадку температурне поле  $T$  для ізотропного тіла визначається із рівняння

$$\nabla^2 T = 0. \quad (6)$$

За допомогою методу Фур'є загальний розв'язок рівняння (6) для циліндра зобразимо так:

$$T(r, z) = A_0 + B_0 z + D_0 (r^2 - 2z^2) + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\beta_k r) (A_k \operatorname{sh} \beta_k z + B_k \operatorname{ch} \beta_k z) + \sum_{k=1}^{\infty} I_0(\gamma_k r) (C_k \sin \gamma_k z + D_k \cos \gamma_k z), \quad (7)$$

де  $A_k, B_k, C_k, D_k$  ( $k = \overline{0, \infty}$ ) – довільні постійні;  $J_0(\beta_k r)$  – функція Бесселя першого роду дійсного аргументу;  $I_0(\gamma_k r)$  – функція Бесселя першого роду уявного аргументу;  $\beta_k, \gamma_k$  – власні значення, які визначаємо із граничних умов.

Для знаходження температури в шарі вводимо трансформанту Ганкеля функції  $T^1(r, z)$  нульового порядку

$$\bar{T}^1(\xi, z) = \int_0^{\infty} r T^1(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (8)$$

за допомогою якої із рівняння (6) знаходимо вираз  $T^1(\rho, \xi)$  через дві довільні функції  $\varphi_1(\eta)$  і  $\varphi_2(\eta)$ :

$$T^1(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} [\varphi_1(\eta) e^{\eta \xi} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta \xi}] J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (9)$$

де  $\rho = \frac{r}{R}$ ;  $\xi = \frac{z}{R}$ ;  $\eta = \xi R$ .

Умова (2) буде задовольнятися, якщо покласти  $D_0 = 0$ ;  $D_k = 0$ ;  $C_k = 0$  ( $k = \overline{1, \infty}$ );

$\beta_k = \frac{\mu_k}{R}$ , де  $\mu_k$  – корені рівняння  $J_1(\mu) = 0$ .

Гранична умова (1), з урахуванням ортогональності функції Бесселя, призводить до деяких співвідношень між постійними  $A_n$  і  $B_n$ , у результаті чого температурне поле в циліндрі виражається через одну нескінченну систему постійних  $C_k^{(1)}$  за формулою

$$T(\rho, \xi) = T_0 \left\{ 1 + C_0^{(1)} \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} (\xi - l) + \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(1)} J_0(\mu_k \rho) \frac{sh \mu_k (\xi - l)}{ch \mu_k l} \right\}, \quad l = \frac{L}{R}. \quad (10)$$

Граничні умови (3-5) призводять до системи інтегральних рівнянь, які зв'язують функції  $\varphi_k(\eta)$  ( $k=1,2$ ) з коефіцієнтами  $C_k^{(1)}$  ( $k=0, \infty$ ).

$$\int_0^{\infty} \eta [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 \left[ C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)} \right], \quad (\rho < 1); \quad (11)$$

$$\int_0^{\infty} [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = T_0 f_1(\rho), \quad (\rho < 1); \quad (12)$$

$$\int_0^{\infty} [(k_2^1 + \eta) \varphi_1(\eta) + (k_2^1 - \eta) \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho \geq 1); \quad (13)$$

$$\int_0^{\infty} [(\eta - k_1^1) e^{-\eta h} \varphi_1(\eta) - (\eta + k_1^1) e^{\eta h} \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (14)$$

де

$$f_1(\rho) = 1 - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left( l + \frac{1}{h_0^1} \right) C_0^{(1)} - \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k \rho) \left( th \mu_k l + \frac{\mu_k}{h_0^1} \right) C_k^{(1)},$$

$$h = \frac{H}{R}; \quad k_1^1 = H_1^1 R; \quad k_2^1 = H_2^1 R; \quad h_0^{(1)} = \frac{h_0 R}{\lambda_z}.$$

Застосувавши формулу інтегрального перетворення Ганкеля [6] до рівняння (14) і ввівши позначення  $\varphi(\eta) = (k_2^1 + \eta) \varphi_1(\eta) + (k_2^1 - \eta) \varphi_2(\eta)$ , одержимо систему рівнянь відносно функцій  $\varphi_1(\eta)$  і  $\varphi_2(\eta)$ , розв'язок яких матиме вигляд

$$\varphi_1(\eta) = \frac{T_0}{2Q(\eta)} (\eta + k_1^1) e^{\eta h} \varphi(\eta), \quad \varphi_2(\eta) = \frac{T_0}{2Q(\eta)} (\eta - k_1^1) e^{-\eta h} \varphi(\eta), \quad (15)$$

де

$$Q(\eta) = (\eta^2 + k_1^1 k_2^1) sh \eta h + (k_1^1 + k_2^1) \eta ch \eta h. \quad (16)$$

Підставивши функції  $\varphi_1(\eta)$  і  $\varphi_2(\eta)$  з (15) в рівняння (11)-(13), одержимо

$$\int_0^{\infty} \frac{P_2(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta = C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)}, \quad (\rho < 1); \quad (17)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{P_1(\eta) \varphi(\eta)}{Q(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta = f_1(\rho), \quad (\rho < 1); \quad (18)$$

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = 0, \quad (\rho \geq 1), \quad (19)$$

де

$$P_1(\eta) = k_1^1 sh \eta h + \eta ch \eta h, \quad P_2(\eta) = \eta (sh \eta h + k_1^1 ch \eta h).$$

Для визначення функції  $\varphi(\eta)$  продовжимо рівняння (19) на весь інтервал ( $0 \leq \rho < \infty$ ).

$$\int_0^{\infty} \varphi(\eta) J_0(\eta \rho) d\eta = U(1 - \rho) Y(\rho) \quad (0 \leq \rho < \infty). \quad (20)$$

Тут  $U(x)$  – функція Гевісайда;  $Y(\rho)$  – функція, яка визначається співвідношенням

$$Y(\rho) = X_0 + \sum_{k=1}^N J_0(\mu_k \rho) X_k, \quad (0 \leq \rho < 1), \quad (21)$$

де  $X_k (k = \overline{0, N})$  – невідомі коефіцієнти. Значення  $N$  вибираємо із умови виконання необхідної точності задоволення граничних умов задачі.

Застосувавши до обох частин рівняння (20) формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [6], знайдемо функцію

$$\varphi(\eta) = J_1(\eta) X_0 + \eta^2 J_1(\eta) \sum_{k=1}^N \frac{J_0(\mu_k)}{\eta^2 - \mu_k^2} X_k. \quad (22)$$

Підставивши функцію  $\varphi(\eta)$  з (22) в інтегральні рівняння (17)-(18), прийдемо до співвідношень, які зв'язують невідомі коефіцієнти  $C_k^{(1)} (k = \overline{0, \infty})$  і  $X_k (k = \overline{0, N})$ .

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{(1)}(\rho) X_k = f_1(\rho), \quad (\rho < 1); \quad (23)$$

$$\sum_{k=0}^N \alpha_k^{(2)}(\rho) X_k = C_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k J_0(\mu_k \rho) C_k^{(1)}, \quad (\rho < 1). \quad (24)$$

Обчисливши невідласні інтеграли згідно з [7], отримаємо

$$\alpha_0^{(j)}(\rho) = \int_0^{\infty} \frac{P_j(\eta) J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta)} d\eta = \gamma_0^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{Q'(iy_m)}, \quad (25)$$

$$\alpha_k^{(j)}(\rho) = J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{\eta^2 P_j(\eta) J_1(\eta) J_0(\eta \rho)}{Q(\eta)(\eta^2 - \mu_k^2)} d\eta = \frac{P_j(\mu_k)}{Q(\mu_k)} J_0(\mu_k \rho) +$$

$$+ 2 J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (j = 1, 2),$$

де

$$\gamma_0^{(1)} = r_1, \quad \gamma_0^{(2)} = k_1^1 r_2;$$

$$r_1 = (k_1^1 h + 1) r_2, \quad r_2 = (k_1^1 k_2^1 h + k_1^1 + k_2^1)^{-1};$$

$$y_m (m = \overline{1, \infty}) - \text{корені рівняння } Q(iy_m) = 0;$$

$$P_1^*(y_m) = k_1^1 \sin y_m h + y_m \cos y_m h, \quad P_2^*(y_m) = y_m (k_1^1 \cos y_m h - y_m h \sin y_m h);$$

$$Q'(iy_m) = [(k_1^1 k_2^1 - y_m^2) h + k_1^1 + k_2^1] \cos y_m h - y_m [2 + (k_1^1 + k_2^1) h] \sin y_m h.$$

Помноживши обидві частини рівнянь (23), (24) на  $\rho$  та  $\rho J_0(\mu_n \rho)$  і проінтегрувавши по  $\rho$  у межах від 0 до 1, з урахуванням ортогональності функцій Бесселя, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів  $X_k (k = \overline{0, N})$ .

$$\sum_{k=0}^N \alpha_{n,k} X_k = \varepsilon_n, \quad (n = \overline{0, N}), \quad (26)$$

де

$$\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_n = 0, \quad (n = \overline{1, N}); \quad \alpha_{0,k} = 2 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left( l + \frac{1}{h_0^1} \right) \alpha_{0,k}^{(2)} + \alpha_{0,k}^{(1)},$$

$$C_0^{(1)} = 2 T_0 \sum_{k=0}^N \alpha_{0,k}^{(2)} X_k, \quad C_n^{(1)} = \frac{2 T_0}{\mu_n J_0^2(\mu_n)} \sum_{k=0}^N \alpha_{n,k}^{(2)} X_k,$$

$$\alpha_{n,k} = 2 \frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} \left( th \mu_n l + \frac{\mu_n l}{h_0^1} \right) \alpha_{n,k}^{(2)} + \alpha_{n,k}^{(1)}, \quad (27)$$

$$\alpha_{0,0}^{(j)} = \gamma_{0,0}^{(j)} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_1(y_m)}{y_m Q'(iy_m)}, \quad (j=1,2);$$

$$\gamma_{0,0}^{(1)} = \frac{1}{2} r_1, \quad \gamma_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{2} k_1^1 r_2,$$

$$\alpha_{0,k}^{(j)} = 2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{n,0}^{(j)} = 2J_0(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{y_m P_j^*(y_m) I_1(y_m) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_n^2) Q'(iy_m)},$$

$$\alpha_{n,k}^{(j)} = \begin{cases} \beta_{n,k}^{(j)}, & k \neq n, \\ \beta_{n,k}^{(j)} + \frac{1}{2} \frac{P_j(\mu_n) J_0^2(\mu_n)}{Q(\mu_n)}, & k = n, \end{cases}$$

$$\beta_{n,k}^{(j)} = 2J_0(\mu_k) J(\mu_n) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^3 P_j^*(y_m) K_1(y_m) I_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2)(y_m^2 + \mu_n^2) Q'(iy_m)}.$$

Температуру в шарі, згідно з (9), (15), (22), обчислюємо за формулою

$$T^1(\rho, \xi) = T_0 \left\{ G_0(\xi, \rho) X_0 + \sum_{k=1}^N G_k(\xi, \rho) X_k \right\}, \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} G_0(\xi, \rho) &= \frac{1 + k_1^1(h + \xi)}{k_1^1 k_2^1 h + k_1^1 + k_2^1} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^*(y_m, \xi) K_1(y_m) I_0(y_m \rho)}{Q'(iy_m)}, \\ G_k(\xi, \rho) &= \frac{P(\mu_k, \xi)}{Q(\mu_k)} J_0(\mu_k \rho) + 2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P^*(y_m, \xi) I_0(y_m \rho) K_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (0 \leq \rho < 1); \\ G_0(\xi, \rho) &= -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P^*(y_m, \xi) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1); \\ G_k(\xi, \rho) &= -2J_0(\mu_k) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{Y_m^2 P^*(y_m, \xi) K_0(y_m \rho) I_1(y_m)}{(y_m^2 + \mu_k^2) Q'(iy_m)}, \quad (\rho > 1). \end{aligned} \quad (29)$$

$$P(\eta, \xi) = \eta ch(\xi + h) \eta + k_1^1 sh \eta (h + \xi),$$

$$P^*(y_m, \xi) = y_m \cos y_m(\xi + h) + k_1^1 \sin y_m(\xi + h).$$

Температуру в циліндрі згідно з формулою (10) і позначеннями (27) обчислюємо за формулою

$$T(\rho, \xi) = T_0 \left\{ 1 + 2 \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} \sum_{k=0}^N X_k \left[ (\xi - l) \alpha_{0,k}^{(2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m \rho)}{\mu_m J_0^2(\mu_m)} \frac{\alpha_{m,k}^{(2)} sh \mu_m(\xi - l)}{ch \mu_m l} \right] \right\}, \quad (\rho < 1). \quad (30)$$

Якщо контактна провідність  $h_0^1 = \frac{h_0 R}{\lambda_z} \rightarrow \infty$ , то одержимо розв'язок задачі у випадку ідеального теплового контакту.

Розглянуто числовий приклад для знаходження температури в циліндрі і шарі згідно з формулами (29), (30) при  $l = 2$ ;  $h = 2$ ;  $k_1^1 \rightarrow \infty$ ;  $k_2^1 = 0$ ;  $\frac{\lambda_z^1}{\lambda_z} = 0,1$ . Розв'язували системи лінійних алгебраїчних рівнянь (26) з 20-ма невідомими, що забезпечувало достатньо високу точність.

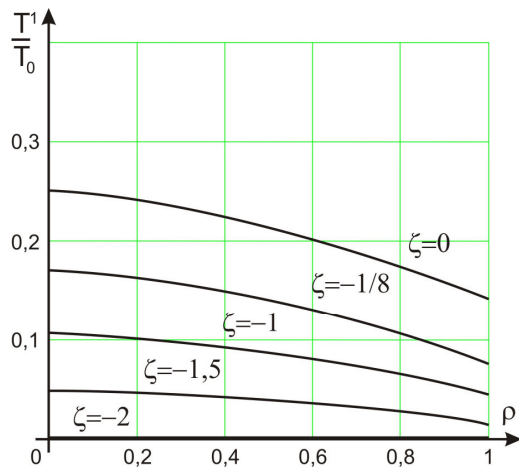


Рис. 1. Розподіл температури при ідеальному тепловому контакті по товщині шару

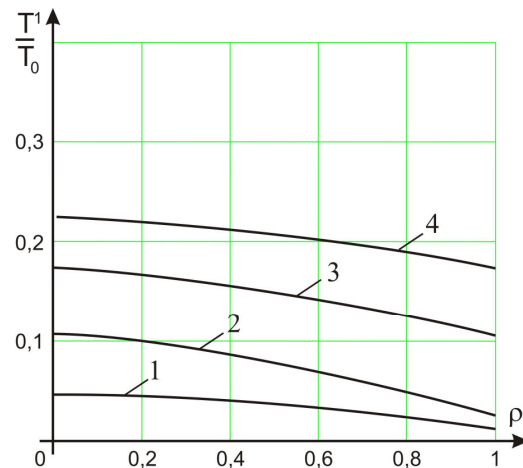


Рис. 2. Розподіл температури в шарі в зоні контакту при різних значеннях контактної провідності: крива 1 –  $h_0^1 = 0,1$ ; 2 –  $h_0^1 = 1$ ; 3 –  $h_0^1 = 5$ ; 4 –  $h_0^1 = \infty$

**Висновок.** Розв'язок краєвих задач для знаходження температурних полів зведено до визначення деяких постійних із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходимо температурні поля в будь-якій точці циліндра і шару. Числовий приклад показує, що контактна провідність  $h_0^1$  значно впливає на розподіл температури в зоні контакту системи тіл циліндр–шар.

#### Література

1. Грилицкий Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости / Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд-во при Львов. ун-те, 1981. – 135с.
2. Грилицкий Д.В. Термопружні контактні задачі в трибології / Д.В. Грилицкий. – К.: ІЗМА, 1996. – 204 с.
3. Окрепкий Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр–півпростір при неідеальному тепловому контакті / Богдан Окрепкий, Марія Шелестовська // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2005. – №3. – С. 23–27.
4. Окрепкий Б.С. Осесимметрична температурна задача для системи тіл циліндр–півпростір при неідеальному тепловому контакті з врахуванням анізотропії матеріалів / Богдан Окрепкий, Федір Мигович // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – 2009. – №4. – С. 188–192.
5. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / А.Д. Коваленко. – К.: Наукова думка, 1970. – 304 с.
6. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье / И.Н. Снеддон. – М.: ИЛ, 1955. – 668 с.
7. Мигович Ф.М. Обчислення групи невластних інтегралів, які містять функції Бесселя I-го роду / Федір Мигович, Богдан Окрепкий // Збірник наукових праць Академії наук України. – Київ, 1995. – №8. – С. 133–137.

Отримано 14.06.2010 р.