Міністерство освіти і науки України
Коледж Чортківського навчально-наукового інституту підприємництва і бізнесу
Тернопільського національного економічного університету

Методична розробка
з дисципліни «Математика»

Тернопіль 2014

Укладач: *Алілуйко Андрій Миколайович*, кандидат фізико-математичних наук, викладач коледжу ЧІПБ ТНЕУ.

Рецензенти: *Неміш Василь Миколайович*, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри економіко-математичних методів Тернопільського національного економічного університету;

Пришляк Ірина Михайлівна, методист з математики, завідувач лабораторії природничо-математичних дисциплін Тернопільського обласного комунального інституту післядипломної педагогічної освіти.

Методична розробка містить теоретичний матеріал з дисципліни «Математика» (алгебра та початки аналізу) та приклади розв’язування задач.

Для студентів вищих навчальних закладів І-ІІ рівня акредитації.

ПЕРЕДМОВА

Методична розробка містить теоретичний матеріал і задачі з курсу математики. Теоретичний матеріал включає викладення найбільш складних питань шкільного курсу алгебри та початків аналізу. Особливу увагу приділено тим розділам курсу, які використовуються в курсі вищої математики за програмою економічних спеціальностей.

Методична розробка з дисципліни «Математика» складається з п'ятнадцяти параграфів:

1. Множини.
2. Функції, їх властивості та графіки.
3. Степенева функція.
4. Ірраціональні рівняння.
5. Тригонометричні функції.
6. Співвідношення між тригонометричними функціями.
7. Обернені тригонометричні функції.
8. Тригонометричні рівняння.
9. Показникова і логарифмічна функції.
10. Елементи теорії імовірностей та статистики.
11. Поняття похідної, її механічний і геометричний зміст.
12. Диференціювання функцій.
13. Застосування похідної до дослідження функцій.
14. Первісна та її властивості.
15. Визначений інтеграл та його застосування.

Кілька зауважень про те, як користуватися методичною розробкою.

Основний матеріал розподілено по параграфах. При опрацюванні теоретичного матеріалу слід звертати увагу на слова, надруковані курсивом і жирним шрифтом. **Жирним шрифтом** виділено терміни, назви понять. *Курсивом* надруковано важливі твердження, теореми. Для ознайомлення з основними ідеями пропонуються приклади розв'язування задач по кожній темі.

Методичною розробкою можуть користуватися викладачі та студенти вищих навчальних закладів I-II рівня акредитації, вчителі та учні середніх шкіл, гімназій, абітурієнти.

§ 1. МНОЖИНИ

1. Поняття множини

Одним з основних понять, які використовують у математиці, є поняття множини. Для нього не дають означення. Можна пояснити, що **множиною називають** довільну сукупність об'єктів, а самі об'єкти – елементами даної множини. Так, можна говорити про множину учнів у класі (елементи – учні), множину днів тижня (елементи – дні тижня), множину натуральних дільників числа 6 (елементи – числа 1, 2, 3, 6) тощо. У курсах алгебри та алгебри і початків аналізу найчастіше розглядають множини, елементами яких є числа, і тому їх називають числовими множинами.

Як правило, множини позначають великими літерами латинського алфавіту. Наприклад, якщо множина A складається із чисел 1; 2; 3, то її позначають так: $A = \{1; 2; 3\}$. Той факт, що число 2 входить до цієї множини (є елементом даної множини A), записують за допомогою спеціального значка $\in$ так: $2 \in A$; а те, що число 3 не входить до цієї множини (не є елементом даної множини), записують так: $3 \notin A$.

Можна розглядати також множину, яка не містить жодного елемента, – **порожню множину**.

Для деяких множин існують спеціальні позначення. Так, порожню множину позначають символом $\varnothing$, множину всіх натуральних чисел – літерою N, множину всіх цілих чисел – літерою Z, множину всіх раціональних чисел – літерою Q, а множину всіх дійсних чисел – літерою R. Множини бувають **скінченні** і **нескінченні** залежно від того, яку кількість елементів вони містять. Так, множини $A = \{2\}$; $B = \{1; 2; 3\}$ – скінченні, бо містять скінченне число елементів, а множини N, Z, Q, R – нескінченні.

Множини задають або за допомогою переліку їх елементів (це можна зробити лише для скінченних множин), або за допомогою опису, коли задається правило – **характеристична властивість**, яке дозволяє визначити, належить чи ні даний об'єкт розглядуваній множині. Наприклад, множина $A = \{-1; 0; 1\}$ задана переліком елементів, а множина B парних цілих чисел – характеристичною властивістю елементів множини. Останню множину інколи записують так: $B = \{b : b$ – парне ціле число$\}$ або так: $B = \{b : b = 2k$, де $k \in Z\}$ – тут після символу «:» записана характеристична властивість.

Означення. ***Дві множини називаються рівними****, якщо кожний елемент першої множини є елементом другої множини і, навпаки, кожний елемент другої множини є елементом першої множини.*

Справді, дві множини $A = \{3;\ 1;\ 2\}$ та $B = \{1;\ 2;\ 3\}$ вважають рівними, оскільки ці множини складаються з одних і тих самих елементів. Це записують так: $A = B$.

Означення. *Якщо кожен елемент однієї множини A є елементом множини B, то кажуть, що перша* ***множина A є підмножиною множини B.***

Це записують так: $A \subset B$. Наприклад, $\{1;\ 2\} \subset \{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $N \subset Z$ (оскільки будь-яке натуральне число – ціле), $Z \subset Q$ (оскільки будь-яке ціле число – раціональне), $Q \subset R$ (оскільки будь-яке раціональне число – дійсне).

Вважають, що завжди $\varnothing \subset A$, тобто порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.

Можна довести **твердження**: *дві множини рівні, якщо кожна з них є підмножиною іншої.*

Інколи співвідношення між множинами зручно ілюструвати за допомогою кругів (які часто називають **кругами Ейлера–Венна**). Наприклад, рисунок 1 ілюструє означення підмножини, а рисунок 2 – співвідношення між множинами *N*, *Z*, *Q*, *R*.

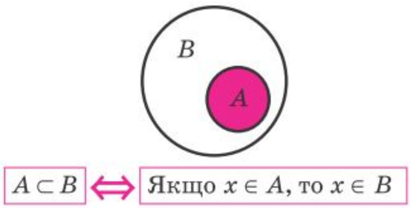


Рис. 1

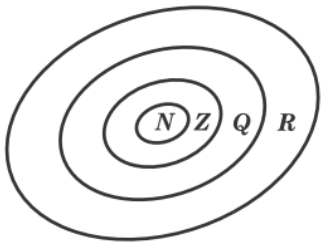


Рис.2

2. Операції над множинами

Над множинами можна виконувати певні дії: перетин, об’єднання, знаходження різниці множин.

Дамо означення цих операцій і проілюструємо їх за допомогою кругів Ейлера-Венна.

Означення. ***Перетином множин A і B*** *називають їхню спільну частину, тобто множину C усіх елементів, що належать як множині A, так і множині B.*

Перетин множин позначають знаком $\cup$ (на рисунку 3 наведено ілюстрацію означення перетину множин).

Наприклад, якщо $A = \{2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{0;\ 2;\ 4;\ 6\}$, то $A \cup B = \{2;\ 4\}$.

Означення. ***Об'єднанням множин А і В*** *називають множину С, що складається з усіх елементів, які належать хоча б одній із цих множин (А або В).*

Об'єднання множин позначають знаком $\cap$ (на рисунку 4 наведено ілюстрацію означення об'єднання множин).

Наприклад, для множин A і B з попереднього прикладу $A \cap B$ = {0; 2; 3; 4; 6}.

Означення. ***Різницею множин А і В*** *називається множина С, яка складається з усіх елементів, які належать множині А і не належать множині В.*

Різницю множин позначають знаком \ (на рисунку 5 наведено ілюстрацію означення різниці множин).

Наприклад, якщо A = {1; 2; 3}, B = {2; 3; 4; 5}, то $A \setminus B$ = {1}, а $B \setminus A$ = {4; 5}.

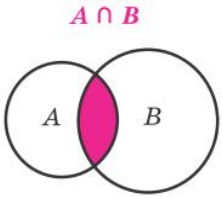


Рис. 3

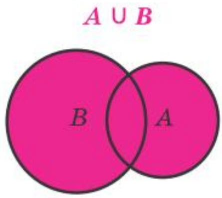


Рис.4

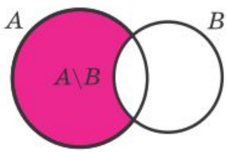


Рис. 5

3. Числові множини. Множина дійсних чисел

У курсі математики ви зустрічалися з різними числами: натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними, дійсними. Уявлення про числа у людства складалися поступово, під впливом вимог практики. Наприклад, **натуральні числа** з'явилися у зв'язку з необхідністю підрахунку предметів. Але для того щоб дати відповідь на запитання «Скільки сірників у порожній коробці з-під сірників?», множини натуральних чисел N = {1; 2; 3; ...} недостатньо – для цього потрібно мати ще й число нуль.

Приєднуючи до множини N натуральних чисел число 0, одержуємо множину **невід'ємних цілих чисел**. Її часто позначають $Z_0 = \{0;1;2;3;\ldots\}$. Одних тільки невід'ємних цілих чисел виявилося недостатньо для розв'язування задач практики (а отже, і математичних задач, що відображують задану реальну ситуацію). Так, для того щоб охарактеризувати температуру повітря вище і нижче нуля чи рух тіла в протилежних напрямках, потрібні протилежні до натуральних числа, тобто від'ємні числа. Для натурального числа n протилежним вважають число $-n$, а для числа $-n$ протилежним вважають число n. Нуль вважають числом, протилежним самому собі.

Натуральні числа, нуль і числа, протилежні натуральним, складають множину Z **цілих чисел**.

Вимірювання величин привело до необхідності розширення множини цілих чисел і введення **раціональних чисел**. Наприклад, середня багаторічна температура повітря в січні в м. Тернополі становить – 7,3°C, тривалість уроку – 45 хв, або $\frac{3}{4}$ год.

Таким чином, вибираючи якусь одиницю виміру, ми одержуємо числове значення величин, що можна виразити за допомогою різних раціональних чисел — цілих і дробових, додатних і від'ємних.

Цілі і дробові числа складають множину Q **раціональних чисел**.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$ (тобто чисельник m є цілим числом, а знаменник n – натуральним).

Раціональне число можна записати різними дробами. Наприклад,

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{3}{9}, \quad -\frac{3}{2} = -\frac{6}{4}, \quad 1{,}3 = \frac{13}{10} = \frac{26}{20}, \quad 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}, \quad \sqrt{9} = 3 = \frac{3}{1} = \frac{9}{3}.$$

Як видно з наведених прикладів, серед дробів, що зображують дане раціональне число, завжди є єдиний нескоротний дріб (для цілих чисел – це дріб, знаменник якого дорівнює 1).

Зауважимо, що раціональне число, записане у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$, можна записати також у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу, поділивши чисельник на знаменник. Наприклад,

$$\frac{1}{4} = 0{,}25, \quad \frac{1}{6} = 0{,}16666\ldots.$$

Домовимося, що скінченний десятковий дріб можна зображувати у вигляді нескінченного, у якого після останнього десяткового знака, відмінного від нуля, на місці наступних десяткових знаків записують нулі, наприклад, $\frac{1}{4} = 0{,}250000\ldots4$.

Цілі числа також домовимося записувати у вигляді нескінченного десяткового дробу, у якого справа від коми на місці десяткових знаків стоять нулі, наприклад 13 = 13,000....

Отже, *кожне раціональне число може бути записане у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу і, навпаки, кожний нескінченний періодичний десятковий дріб задає раціональне число.*

З курсу алгебри відомо, що число $\sqrt{3}$ не є раціональним. Це так зване **ірраціональне** число. Кожне ірраціональне число можна записати вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

Наприклад, $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$, $\pi = 3{,}14\ldots$.

Раціональні та ірраціональні числа складають множину **дійсних чисел** R. На координатній прямій кожному дійсному числу відповідає єдина точка і, навпаки, кожній точці координатної прямої відповідає єдине дійсне число (у такому разі кажуть, що між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої встановлюється взаємно однозначна відповідність).

Кожне дійсне число можна записати у вигляді нескінченного десяткового дробу: раціональні числа – у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, ірраціональні – у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

4. Модуль дійсного числа та його властивості

Означення. ***Модулем додатного числа*** *називається саме це число, модулем від'ємного числа – число, йому протилежне; модуль нуля дорівнює нулю.*

Це означення можна коротко записати декількома способами.

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} \quad |a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0, \end{cases} \quad |a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ -a, & a \le 0. \end{cases}$$

За потреби ми будемо користуватися будь-яким із цих записів означення модуля. Для того щоб знайти $|a|$, за означенням необхідно знати знак числа a і використати відповідну формулу. Наприклад,
$|3| = 3$, $|-5| = -(-5) = 5$, $\left|\sqrt{2} - 3\right| = -(\sqrt{2} - 3) = 3 - \sqrt{2}$.

На координатній прямій модуль числа *– це відстань від початку координат до точки, що зображає це число.*

Дійсно, якщо $a > 0$ (рис. 6), то відстань $OA = a = |a|$.

Якщо $b < 0$, то відстань $OB = -b = |b|$.

Модуль різниці двох чисел a і b *– це відстань між точками a і b на координатній прямій.*

З означення модуля випливає, що для будь-якого дійсного числа виконуються співвідношення:

1) $|a| \ge 0$; 2) $|-a| = |a|$; 3) $a \le |a|$.

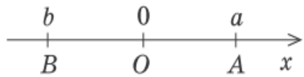


Рис. 6

Ці співвідношення означають таке: 1) модуль дійсного числа x є число невід'ємне; 2) протилежні числа x і $-x$ мають рівні між собою модулі; 3) будь-яке дійсне число не більше за свій модуль.

Наведемо деякі *властивості модуля* дійсного числа.

1. Модуль суми двох дійсних чисел не більший за суму модулів доданків:

$$|a+b| \le |a| + |b|.$$

Ця властивість справджується для будь-якої кількості доданків:

$$|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

2. Модуль різниці двох дійсних чисел не менший за різницю модулів зменшуваного та від'ємника:

$$|a-b| \ge |a| - |b|.$$

3. Модуль добутку двох дійсних чисел дорівнює добутку модулів множників:

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

4. Модуль частки двох дійсних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника:

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \ne 0).$$

§2. ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ ТА ГРАФІКИ

1. Поняття числової функції

Означення. ***Числовою функцією*** *з областю визначення D називається відповідність, при якої кожному числу x з множини D співставляється за деяким правилом число y, що залежить від x.*

Функції звичайно позначають латинськими (а іноді грецькими) буквами. Розглянемо довільну функцію f. Незалежну змінну називають також **аргументом функції**. Число y, що відповідає числу x, називають **значенням функції** f у точці x і позначають $f(x)$. Область визначення f функції позначають $D(f)$. Множину, що складається з усіх чисел $f(x)$, таких, що x належить області визначення функції f, називають **областю значень** функції f і позначають $E(f)$.

Найчастіше функцію задають за допомогою формули. При цьому якщо не дано додаткових обмежень, то областю визначення функції, заданою формулою, вважають множину усіх значень змінної, при яких ця формула має сенс. Наприклад, формула $f(x)=\dfrac{1}{x}$ має сенс при всіх $x \neq 0$, тому областю визначення функції $f(x)=\dfrac{1}{x}$ вважають множину усіх не рівних нулю дійсних чисел. Область її значень збігається з областю визначення і є об'єднанням інтервалів $(-\infty;\ 0)$ і $(0;\ \infty)$, тобто $D(f)=E(f)=(-\infty;0)\bigcup(0;\infty)$.

Функції виду $f(x) = p(x)$, де $p(x)$ – многочлен, називають цілими **раціональними функціями**, а функції виду $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, де $p(x)$ і $q(x)$ – многочлени, називають **дробово-раціональними функціями**. Частка $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, визначена, якщо $q(x)$ не перетворюється в нуль. Тому область визначення дробово-раціональної функції $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, – множина усіх дійсних чисел, з якого виключені корені многочлена $q(x)$.

Приклад 1. Знайдемо область визначення дробово-раціональної функції

$$f(x)=\frac{7x^8-5x^6+3x^2-4x}{x^3-3x^2+2x}.$$

Розв'язування. Корені многочлена $x^3 - 3x^2 + 2x$ – числа 0, 1 і 2. Тому $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; \infty)$.

2. Графік функції

Означення. ***Графіком функції*** f *називають множину усіх точок* $(x; y)$ *координатної площини, де* $y = f(x)$, *а x «пробігає» всю область визначення функції* f.

Множина, зображена на рисунку 1, не є графіком функції, тому що вона містить дві точки з однієї і тією же абсцисою a, але різними ординатами b_1 і b_2. Якби ми прийняли цю множина за графік функції, то довелося б вважати, що ця функція має при $x = a$ відразу два значення b_1 і b_2, що суперечить означенню функції.

Часто функцію задають графічно. При цьому для будь-якого x_0 з області визначення легко знайти відповідне значення $y_0 = f(x_0)$ функції (рис. 2).

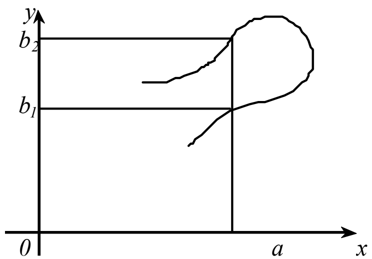


Рис. 1

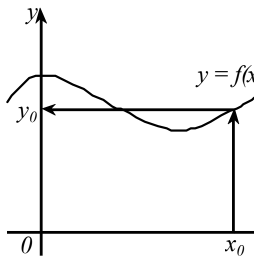


Рис. 2

3. Зростання й спадання функцій

Важливими характеристиками функцій є їх зростання та спадання.

Означення. ***Функція*** f ***зростає*** *на множині* P, *якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає більше значення функції, тобто для будь-яких* x_1 *і* x_2 *з множині* P, *таких, що* $x_2 > x_1$, *виконується нерівність* $f(x_2) > f(x_1)$.

На рисунку 3 наведено графік зростаючої функції $y = x^3$. Дійсно, при $x_2 > x_1$ маємо $x_2^3 > x_1^3$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$.

Означення. ***Функція*** f ***спадає*** *на множині* P, *якщо більшому значенню аргументу із цієї множини відповідає менше значення функції, тобто для будь-яких* x_1 *і* x_2 *з множині* P, *таких, що* $x_2 > x_1$, *виконується нерівність* $f(x_2) < f(x_1)$.

Наприклад, функція $f(x) = -2x$ спадна (на всій області визначення, тобто на множині R), оскільки, якщо $x_2 > x_1$, то $-2x_2 < -2x_1$, отже, $f(x_2) < f(x_1)$. Відповідні точки графіка спадної функції при збільшенні аргументу опускаються (рис. 4).

Розглядаючи графік функції $y = x^2$ (рис. 5), бачимо, що на всій області визначення ця функція не є ні зростаючою, ні спадною. Але можна виділити проміжки області визначення, де ця функція зростає і де спадає. Так, на проміжку [0; +∞) функція $y = x^2$ зростає, а на проміжку (–∞; 0] – спадає.

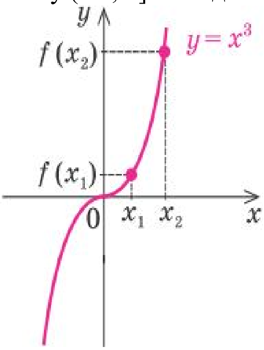


Рис. 3

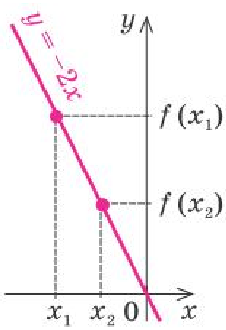


Рис. 4

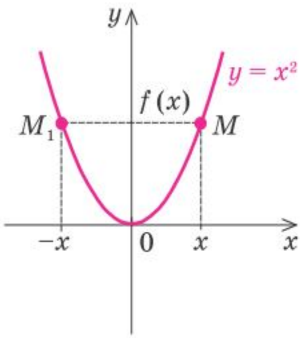


Рис. 5

4. Парні і непарні функції

Розглянемо функції, області визначення яких симетричні відносно початку координат, тобто для будь-якого x з області визначення число $(-x)$ також належить області визначення. Для таких функцій визначено поняття парності і непарності.

Означення. ***Функція f називається парною****, якщо для будь-якого x з її області визначення* $f(-x) = f(x)$ (рис. 6).

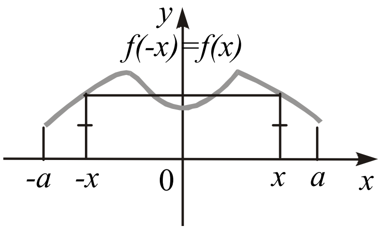


Рис. 6

Означення. ***Функція f називається непарною****, якщо для будь-якого x з її області визначення* $f(-x) = -f(x)$ (рис. 7).

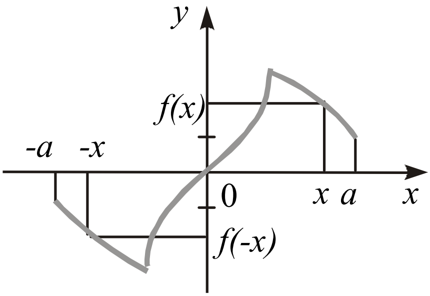


Рис. 7

Приклад 2. Функція $f(x) = x^4$ парна, а функція $g(x) = x^3$ непарна. Дійсно, область визначення кожної з них (це вся числова пряма) симетрична щодо точки O і для будь-якого x виконуються рівності $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, $g(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -g(x)$. Графіки функцій зображені на рисунках 8 і 9.

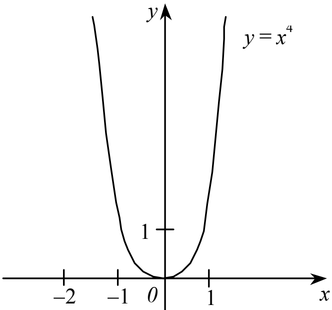


Рис. 8

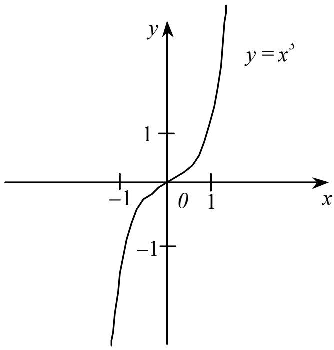


Рис. 9

При побудові графіків парних і непарних функцій будемо користатися наступними властивостями:

1. *Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.*

2. *Графік непарної функції симетричний і відносно початку координат.*

З цих двох правил випливає наступне: *при побудові графіка парної чи непарної функції досить побудувати його частину для додатних x, а потім відобразити симетрично отриманий графік відносно осі ординат (у випадку парної функції) чи початку координат (у випадку непарної).*

Приклад 3. Функція $f(x) = x^4 - x$ не є ні парної, ні непарної. Її область визначення симетрична відносно точки 0, але, наприклад, при

$x = 1$ не виконується ні рівність $f(1) = f(-1)$, ні рівність $f(1) = -f(-1)$, оскільки $f(1) = 0$, а $f(-1) = 2$.

Якщо функція на всій області визначення зростає або спадає, то її називають **монотонною**.

5. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень відомих графіків функцій

Ми маємо певний запас функцій, графіки яких вміємо будувати – це функції $y = kx + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{k}{x}$. Покажемо, що, застосовуючи відомі з курсу геометрії зведення про перетворення фігур, цей список можна істотно розширити.

1) Побудова графіка функції *y* = *f*(*x*) + *b*. Позначаючи тут і далі через $(x'; y')$ координати точки, у яку переходить довільна точка $(x; y)$ площини при даному перетворенні, одержимо відомі вам формули

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = y + b. \end{cases} \qquad (1)$$

Нехай f – довільна функція з областю визначення $D(f)$. З'ясуємо, у яку фігуру переходить графік цієї функції при даному переносі. З формул (1) відразу одержуємо, що довільна точка $(x; f(x) + b)$, де $x \in D(f)$.

По означенню графіка функції ця фігура є графіком функції $y = f(x) + b$. Сказане дозволяє сформулювати правило:

Для побудови графіка функції $f(x) + b$, *де b – постійне число, треба перенести графік f уздовж осі ординат на b одиниць.*

Приклад 4. Побудувати графіки функцій $y = x^2 - 5$.

Розв'язування. Побудова здійснюється переносом параболи $y = x^2$ на 5 одиниць вниз по осі Oy (рис. 10).

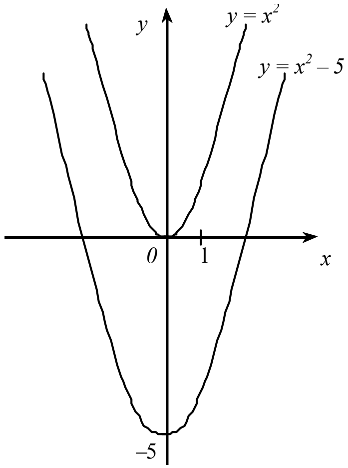


Рис. 10

2) Побудова графіка функції $y = f(x - a)$. Паралельний перенос уздовж осі абсцис на вектор (a; 0) задається формулами

$$\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (2)$$

Кожна точка графіка функції f переходить відповідно до формул (2) у точку ($x + a$; $f(x)$). Тому за допомогою змінних x', y' можна записати, що графік f переходить у фігуру Φ, що складається з точок $(x'; f(x' - a))$, де x' приймає всі значення виду $x + a$ (x «пробігає» $D(f)$).

Саме при цих значеннях x' число $x - a$ належить $D(f)$ і $f(x' - a)$ визначено. Отже, фігура Φ є графік функції $y = f(x - a)$. Отже, можна зробити висновок:

Графік функції $y = f(x - a)$ можна одержати паралельним перенесенням графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox на a одиниць.

Зверніть увагу: якщо $a > 0$, то графік функції переносять у додатному напрямку осі абсцис, а при $a < 0$ – у від'ємному.

Приклад 5. Побудова графіків функцій $y = \sqrt{x+1}$ показано на рис. 11.

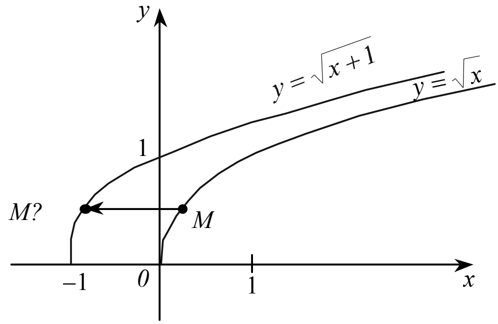


Рис. 11

3) Побудова графіка функції $y = -f(x)$. Дійсно, за означенням графік функції $y = f(x)$ складається з усіх точок M координатної площини, які мають координати $(x; f(x))$. Тоді графік функції $y = -f(x)$ складається з усіх точок K координатної площини, які мають координати $(x; -f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $K(x; -f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Ox (рис. 12). Отже, кожна точка K графіка функції $y = -f(x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Ox деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому *графік функції $y = -f(x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Ox.*

4) Побудова графіка функції $y = f(-x)$. Для побудови графіка функції $y = f(-x)$ врахуємо, що в означенні графіка функції перша координата для точок графіка вибирається довільно з області визначення функції. Якщо вибрати як першу координату $(-x)$, то графік функції $y = f(-x)$ складатиметься з усіх точок T координатної площини з координатами $(-x; f(x))$, а графік функції $y = f(x)$ – з усіх точок M $(x; f(x))$.

Точки $M(x; f(x))$ і $T(-x; f(x))$ розміщено на координатній площині симетрично відносно осі Oy (рис. 13).

Отже, кожна точка T графіка функції $y = f(-x)$ одержується симетричним відображенням відносно осі Oy деякої точки M графіка функції $y = f(x)$. Тому *графік функції $y = f(-x)$ можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ його симетричним відображенням відносно осі Oy.*

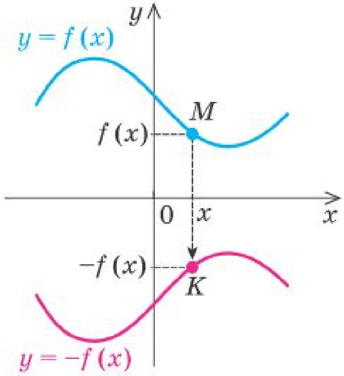


Рис. 12

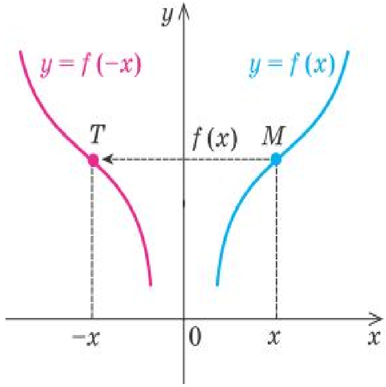


Рис. 13

5) Побудова графіка функції $y = kf(x)$. Перетворення *розтягу уздовж осі Oy з коефіцієнтом k* задається формулами

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = ky. \end{cases} \qquad (3)$$

Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Oy (рис. 14).

При цьому відбувається розтягування відрізка AM' у k разів, і в результаті точка M переходить у точку M'. (Зауважимо, що іноді вказане перетворення графіка функції $y = f(x)$ називають розтягом тільки при $k > 1$, а при $0 < k < 1$ його називають стиском уздовж осі Oy у $\dfrac{1}{k}$ разів.)

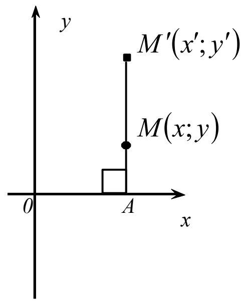


Рис. 14

Як бачимо, кожна точка графіка функції $y = kf(x)$ одержується з точки M перетворенням розтягу вздовж осі Oy. При цьому загальна форма графіка не змінюється: він розтягується або стискається вздовж осі Oy. Наприклад, якщо графіком функції $y = f(x)$ була парабола, то після розтягування або стискування графік залишається параболою. Тому *графік функції $y = kf(x)$ $(k > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $k > 1$ розтяг у k разів) або стискуванням (при $0 < k < 1$ стиск у $\dfrac{1}{k}$ разів) уздовж осі Oy.*

Зауваження. Відзначимо також, що якщо $k < 0$, то для побудови графіка функції $y = kf(x)$ треба спочатку розтягти графіка f у $|k|$ раз, а потім відбити його симетрично відносно осі абсцис.

Приклад 6. Побудувати графіки функцій $y = -2x^2$.

Розв'язування. Побудова здійснюється в першому випадку з графіка функції $y = x^2$ (рис. 15).

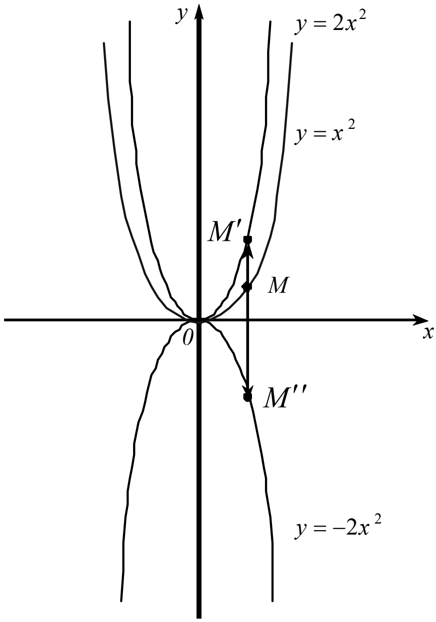


Рис. 15

6) Побудова графіка функції $y = f(kx)$**.** Перетворення розтягу уздовж осі Ox з коефіцієнтом k задається формулами

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = y. \end{cases} \qquad (4)$$

Ці формули виражають координати $(x'; y')$ точки M', у яку переходить точка $M(x; y)$ при перетворенні розтягу вздовж осі Ox (рис. 16). При цьому перетворенні відбувається розтягування відрізка BM в k разів, і в результаті точка M переходить у точку M'.

Зауважимо, що іноді вказане перетворення називають розтягом (у $\frac{1}{k}$ разів) тільки при $0 < k < 1$, а при $k > 1$ його називають стиском уздовж осі Ox (у k разів). Як бачимо, кожна точка графіка функції $y = f(kx)$ одержується з точки M графіка функції $y = f(x)$ перетворенням розтягу вздовж осі Ox (при цьому загальна форма графіка не змінюється). Тому *графік функції $y = f(kx)$ $(k > 0)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ його розтягуванням (при $0 < k < 1$ розтяг в $\frac{1}{k}$ разів) або стискуванням (при $k > 1$ стиск в k разів) уздовж осі Ox.*

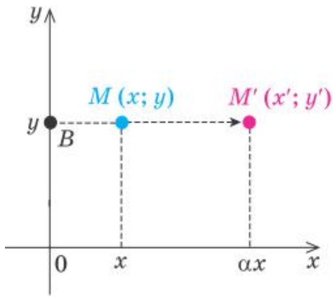


Рис. 16

7) Побудова графіка функції $y = |f(x)|$. За означення модуля числа та алгоритмом побудови графіка функції $y = -f(x)$ можна записати:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{при } f(x) \geq 0 \quad (\textit{графік не змінюється}); \\ -f(x), & \text{при } f(x) < 0 \quad (\textit{симетрія відносно осі } Ox). \end{cases}$$

Отже, *графік функції $y = |f(x)|$ може бути побудований так: частина графіка функції $y = f(x)$, яка лежить вище осі Ox (і на самій осі), залишається без зміни, а та частина, яка лежить нижче осі Ox, відображується симетрично відносно цієї осі.*

Наприклад, на рисунку 17 з використанням цього правила зображено графік функції $y = |2x - 1|$.

8) Побудова графіка функції $y = f(|x|)$. За означення модуля числа та алгоритмом побудови графіка функції $y = f(-x)$ можна записати:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x), & \text{при } x \geq 0 \quad (\textit{графік не змінюється}); \\ f(-x), & \text{при } x < 0 \quad (\textit{симетрія відносно осі } Oy). \end{cases}$$

Отже, *графік функції $y = f(|x|)$ будують так: частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишають без зміни і саме цю частину відображують симетрично відносно осі Oy.*

Наприклад, на рисунку 18 з використанням цього правила зображено графік функції $y = 2|x| - 1$.

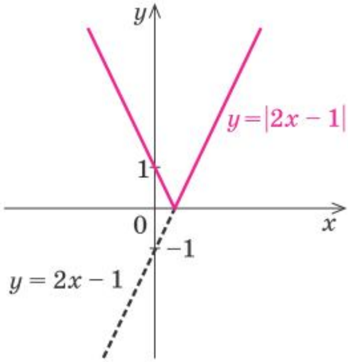


Рис. 17

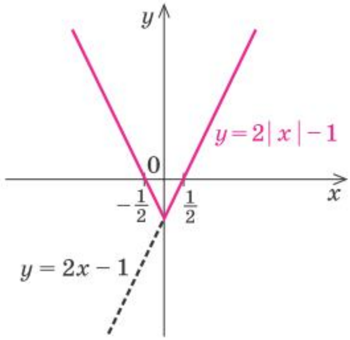


Рис. 18

6. Оберенена функція

Нехай функція $y = f(x)$ монотонна на інтервалі $(a;b)$ і при цьому змінна y змінюється на інтервалі $(c;d)$. Розв'яжемо рівняння $y = f(x)$ відносно x і знайдемо розв'язок $x = g(y)$. Функція $y = g(x)$ називається **оберненою** до функції $y = f(x)$. При зазначених умовах обернена функція $y = g(x)$ існує і монотонна при $x \in (c;d)$. При цьому справедливі рівності

$$g(f(x)) = x\,,\ x \in (a;b);\quad f(g(x)) = x\,,\ x \in (c;d) \qquad (5)$$

Графіки функцій $y = f(x)$, $y = g(x)$ розташовані симетрично відносно бісектриси першого координатного кута.

Приклад 7. Функція $y = x^2$ при $x \geq 0$ визначає залежність між перемінними x, y, яку також можна задати рівнянням $x = \sqrt{y}$, $y \geq 0$. У прикладі $f(x) \equiv x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$. Рівності (5) приймуть вид

$$g(f(x)) \equiv \sqrt{x^2} = x\,,\ x \geq 0\,;$$

$$f(g(x)) \equiv \left(\sqrt{x}\right)^2 = x\,,\ x \geq 0\,.$$

Графіки функцій $y = x^2$, $x = \sqrt{y}$ розташовані симетрично щодо бісектриси першого координатного кута (рис. 19).

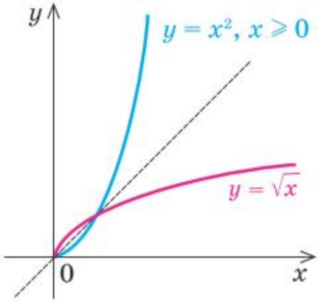


Рис. 19

§3. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ

1. Корінь *n*-го степеня. Арифметичний корінь *n*-го степеня, його властивості

Означення. ***Коренем n-го степеня*** *(n – натуральне число) з дійсного числа a називають дійсне число b, n-й степінь якого дорівнює a.*

Корінь *n*-го степеня із числа *a* позначають: $\sqrt[n]{a}$ (читають: «корінь *n*-го степеня з числа *a*»). Згідно з визначенню кореня *n*-го степеня маємо

$$\sqrt[n]{a} = b, \text{ якщо } b^n = a. \tag{1}$$

Розглянемо приклади.

1. Запис $\sqrt[3]{343}$ означає корінь третього степеня (або кубічний корінь) з числа 343. Оскільки $7^3 = 343$, то $\sqrt[3]{343} = 7$.

2. Запис $\sqrt[5]{-243}$ означає корінь п'ятого степеня з числа –243, $\sqrt[5]{-243} = -3$, оскільки $(-3)^5 = -243$.

3. Числа 3 і –3 – корені четвертого степеня з числа 81, оскільки $3^4 = 81$ і $(-3)^4 = 81$.

4. Запис $\sqrt[4]{-625}$ не має смислу, оскільки не існує такого дійсного числа, четвертий степінь якого дорівнював би – 625.

Якщо *n* – непарне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має сенс при будь-якому *a*; якщо *n* – парне число, то вираз $\sqrt[n]{a}$ має сенс при $a \geq 0$ і не має сенсу при $a < 0$ (парний степінь будь-якого дійсного числа невід'ємний).

Знаходження кореня *n*-го степеня з даного числа *a* називають *добуванням кореня n*-го степеня з числа *a*. Число *a*, з якого добувають корінь *n*-го степеня, називають *підкореневим виразом,* а число *n* – *показником кореня.*

Очевидно, що при всіх значеннях *a*, якщо має сенс вираз $\sqrt[n]{a}$, то згідно з (1) виконується рівність

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a\ . \tag{2}$$

При відшуканні кореня *n*-го степеня з дійсного числа слід брати до уваги таке.

1. Корінь непарного степеня з числа *a* завжди існує, причому лише один; якщо *a* – додатне число, то існує додатне число, яке є коренем непарного степеня з числа *a*, якщо *a* – від'ємне число, то існує від'ємне число, яке є коренем непарного степеня з числа *a*.

2. Існують два протилежні числа, що є коренями парного степеня з додатного числа a; додатний корінь n-го степеня позначають в цьому разі $\sqrt[n]{a}$. Тоді протилежне йому число буде $-\sqrt[n]{a}$.

Наприклад, корені рівняння $x^4 = 8$, які є протилежними числами, записують так: $\sqrt[4]{8}$ (додатний корінь) і $-\sqrt[4]{8}$ (від'ємний корінь).

3. Корінь будь-якого натурального степеня n з числа нуль дорівнює нулю: $\sqrt[n]{0}$, оскільки $0^n = 0$;

4. Корінь парного степеня з від'ємного числа в множині дійсних чисел не існує.

Для будь-якого невід'ємного дійсного числа і будь-якого натурального n (як парного, так і непарного) вираз $\sqrt[n]{a}$ завжди має сенс і позначає невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a.

Означення. *Невід'ємний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a називають* ***арифметичним коренем n-го степеня*** .

Іншими словами, невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює невід'ємному числу a, називають арифметичним коренем n-го степеня з числа a.

Зауваження 1. Надалі запис $\sqrt[n]{a}$ означатиме лише арифметичний корінь n-го степеня з невід'ємного числа a.

Зауваження 2. Якщо $n = 2$, то показник кореня не пишеться. Наприклад, замість $\sqrt[2]{3}$ пишуть $\sqrt{3}$ і читають: «корінь квадратний із 3».

Арифметичний корінь n-го степеня має наступні властивості:

1. Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, n – натуральне число, то

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}. \tag{3}$$

2. Якщо $a \geq 0$ і $b \geq 0$, n – натуральне число, то

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},. \tag{4}$$

3. Якщо $a \geq 0$, n і k – натуральні числа, то

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}. \tag{5}$$

4. Якщо $a \geq 0$, n і k – натуральні числа, то

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}. \tag{6}$$

Іншими словами, для того щоб піднести арифметичний корінь степеня *n* до натурального степеня *k*, достатньо піднести до степеня *k* підкореневий вираз і зі здобутого результату добути корінь степеня *n*.

Наслідки. Виконуються тотожності:

$$\sqrt[n]{a^n} = a \text{ , якщо } a \geq 0, n \text{ – натуральне число;} \tag{7}$$

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a|, \quad k \text{ – натуральне число;} \tag{8}$$

$$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a, \quad k \text{ – натуральне число;} \tag{9}$$

5. Якщо $a \geq 0$, n, k, m – натуральні числа, то

$$\sqrt[nm]{a^{km}} = \sqrt[n]{a^k}. \tag{10}$$

Користуючись цією властивістю, корені з різними показниками завжди можна звести до одного й того самого показника.

Приклад 1. Зведемо, наприклад, до одного й того самого показника корені $\sqrt{3}$ та $\sqrt[3]{2}$. Згідно з формулою (9) дані корені можна звести до найменшого спільного показника, що дорівнює 6:

$$\sqrt{3} = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{27}; \ \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}.$$

6. Якщо $a \geq 0$, n і m – натуральні числа, причому m ділиться на n, то

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, \tag{11}$$

тобто щоб добути корінь зі степеня невід'ємного числа, показник якого ділиться на показник кореня, достатньо показник підкореневого виразу поділити на показник кореня, залишивши основу степеня незмінною.

Приклад 2. Знайти значення виразу $\sqrt{75 \cdot 48}$.

Розв'язування. Підкореневий вираз можна подати у вигляді добутку множників, кожний з яких є квадратом цілого числа: $\sqrt{75 \cdot 48} = \sqrt{25 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 3} = \sqrt{25 \cdot 16 \cdot 9}$. Застосувавши властивість 1, дістанемо: $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 9} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Приклад 3. Спростити вираз $\sqrt{25x^6 y^{18}}$, якщо $x > 0$, $y < 0$.

Розв'язування. Оскільки $\sqrt{25x^6 y^{18}} = \sqrt{5^2 (x^3)^2 (y^9)^2}$, то скористаємося послідовно тотожностями (3) і (8):
$\sqrt{5^2 (x^3)^2 (y^9)^2} = \sqrt{5^2} \sqrt{(x^3)^2} \cdot \sqrt{(y^9)^2} = 5|x^3|\,|y^9|$. Оскільки $x > 0$, то

$x^3 > 0$ і, отже, $\left|x^3\right| = x^3$. Оскільки $y < 0$, то $y^9 < 0$ і, отже, $\left|y^9\right| = -y^9$, тому при $x > 0$ і $y < 0$

$$\sqrt{25x^6y^{18}} = 5\left|x^3\right|\,\left|y^9\right| = 5x^3(-y)^9 = -5x^3y^9.$$

Приклад 4. Спростити вираз $\sqrt{a^2 - 6a + 9} + \sqrt{a^2 - 12a + 36}$ при $3 \le a \le 6$.

Розв'язування. Подамо даний вираз у вигляді $\sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(a-6)^2}$.

Оскільки при $\sqrt{(a-3)^2} = |a-3| = a-3$, а $\sqrt{(a-6)^2} = |a-6| = -(a-6) = 6-a$, то

$$\sqrt{(a-3)^2} + \sqrt{(a-6)^2} = |a-3| + |a-6| = a-3+6-a = 3.$$

Приклад 5. Добути корінь $\sqrt{\dfrac{64a^6}{b^2}}$, якщо $a < 0$, $b > 0$.

Розв'язування. Застосовуючи послідовно відомі теореми, дістаємо:

$$\sqrt{\frac{64a^6}{b^2}} = \frac{\sqrt{64a^6}}{\sqrt{b^2}} = \frac{8\left|a^3\right|}{|b|} = \frac{-8a^3}{b}.$$

2. Перетворення коренів. Дії над ними

Перетворення кореня за формулою

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}\,, \qquad (12)$$

де a і b – невід'ємні числа, n – натуральне число називається **внесенням множника під знак кореня**.

Якщо $a \ge 0$ і $b \ge 0$, то цей вираз можна записати у вигляді $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$. Таке перетворення називають *винесенням множника* з-під знака кореня.

Приклад 6. Внести множник під знак кореня у виразі $2a\sqrt[4]{5a}$, де $a \ge 0$.

Розв'язування. За формулою (12), знаючи, що $a \ge 0$, дістаємо:

$$2a\sqrt[4]{5a} = \sqrt[4]{5a \cdot 2^4 a^4} = \sqrt[4]{80a^5}.$$

Приклад 7. Внести множник під знак кореня $5\sqrt{2}$.

За формулою (12) дістанемо $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 2} = \sqrt{50}$.

Приклад 8. Внести множник під знак радикала $x\sqrt{y}$ при $x < 0$.

Розв'язування. Маємо рівність

$$x\sqrt{y} = -(-x)\sqrt{y} = -\sqrt{(-x)^2 y} = -\sqrt{x^2 y}\ .$$

Приклад 9. Винести множник з-під знака кореня : а) $\sqrt{x^5}$ при $x \geq 0$; б) $\sqrt{2x^2}$ при $x \leq 0$.

Розв'язування. а) $\sqrt{x^5} = \sqrt{\left(x^2\right)^2 x} = x^2\sqrt{x}$;

б) $\sqrt{2x^2} = \sqrt{(-x)^2 2} = -x\sqrt{2}$.

Приклад 10. Винести множник з-під знака кореня:

$$\sqrt[3]{-a^6 \cdot b^9 \cdot c^2} = -a^2 \cdot b^3\sqrt[3]{c^2}\ .$$

$$\sqrt[5]{a^9 b^{11}} = ab^2\sqrt[5]{a^4 b}\ .$$

Приклад 11. Винести множник з-під знака кореня у виразі $\sqrt{a^6 b}$.

Розв'язування. Виносячи множник з-під знак кореня, дістаємо:

$$\sqrt{a^6 b} = \begin{cases} a^3\sqrt{b}, \ \textit{якщо}\ a \geq 0,\ b \geq 0; \\ -a^3\sqrt{b}, \ \textit{якщо}\ a < 0,\ b \geq 0. \end{cases}$$

Корені виду $a\sqrt[n]{c}$, $b\sqrt[n]{c}$, де a, b – раціональні числа, називаються **подібними**. Їх можна **додавати** і **віднімати**:

$$a\sqrt[n]{c} + b\sqrt[n]{c} = (a+b)\sqrt[n]{c}, \quad a\sqrt[n]{c} - b\sqrt[n]{c} = (a-b)\sqrt[n]{c}\ .$$

Приклад 12. Додамо корені

$$\sqrt{18} - \sqrt{12} + \sqrt{32} + \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 2} - \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 3} =$$

$$= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{3}\ .$$

Щоб **перемножити корені з різними показниками**, їх спочатку перетворюють на корені з однаковими показниками. Під час множення коренів можна використовувати формули скороченого множення.

Приклад 13. Розкрити дужки

$$\left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 8 - 3 = 5\ .$$

Якщо корені містяться в знаменнику дробу, то, використовуючи властивості коренів, можна **звільнитися від ірраціональності**.

Приклад 14. Раціоналізуємо знаменники дробів

$$\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} = \sqrt{\frac{33}{11}} = \sqrt{3}; \quad \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2};$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{10}}=\sqrt[3]{\frac{100}{1000}}=\frac{\sqrt[3]{100}}{10};\quad \sqrt[3]{\frac{7}{12}}=\sqrt[3]{\frac{7}{3\cdot 4}}=\sqrt[3]{\frac{7\cdot 9\cdot 2}{27\cdot 8}}=\frac{\sqrt[3]{126}}{6}.$$

Вирази $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$, $a\sqrt{b}-c\sqrt{d}$ називаються **спряженими**. Добуток спряжених виразів не містить коренів:

$$\left(a\sqrt{b}+c\sqrt{d}\right)\left(a\sqrt{b}-c\sqrt{d}\right)=a^2b-c^2d.$$

Ця властивість використовується для раціоналізації знаменників.

Приклад 15. Звільнитися від ірраціональності у знаменнику:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2};$$

Звільнимося від ірраціональності в знаменнику дробу:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt[3]{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{(\sqrt{3}-\sqrt[3]{3})(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3})}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}}{3-\sqrt[3]{9}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt[3]{3}\right)\left(9+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}{\left(3-\sqrt[3]{9}\right)\left(3^2+3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{9^2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(3+3\sqrt{3}+3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+3\sqrt[6]{3}+\sqrt[6]{243}\right).$$

Наведемо ще одну властивість арифметичного кореня: якщо $a>b>0$, то $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$ $\left(n\in N\right)$.

Справді, припустивши, що $\sqrt[n]{a}\le\sqrt[n]{b}$ і піднісши обидві частини нерівності до *n*-го степеня, дістаємо $a\le b$, що суперечить умові $a>b$.

Правильне й обернене твердження: якщо $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$, то $a>b>0$.

3. Степінь з раціональним показником

Введемо поняття степеня з раціональним показником. Розширюючи поняття степеня числа, виходитимемо з такої умови: основна властивість степенів $a^m a^n=a^{m+n}$, що виконується для цілих m і n, має зберігатися і для дробових показників.

Означення. ***Степенем раціонального показника*** $\frac{m}{n}$ *з додатного числа* a, *де* m *– ціле число,* n *– натуральне* $\left(n\neq 1\right)$ *називають корінь n-го степеня із числа* a^m, *тобто*

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Для степенів чисел $a > 0$, $b > 0$ з дробовими (раціональними) показниками r і s справджуються такі *властивості*:

1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; 2) $a^r : a^s = a^{r-s}$; 3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $(ab)^r = a^r b^r$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$, $b \neq 0$.

Наслідок. Для будь-якого додатного числа a і раціонального числа r

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}.$$

4. Степеневі функції, їх властивості та графіки

Означення. ***Степеневими функціями*** *називають функції виду $y = x^{\alpha}$, де α – будь-яке дійсне число.*

Розглянемо властивості степеневої функції при різних значеннях α.

1. Функція $y = x^{\alpha}$ (α – парне натуральне число). Якщо α – парне натуральне число, то функція $y = x^{2n}$, $n \in N$, має властивості і графік, повністю аналогічний властивостям і графіку функції $y = x^2$. Дійсно:

– область визначення функції: $D(y) = R$, область значень: $E(y) = [0;+\infty)$;

– функція парна: $f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно осі ординат;

– оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n}$ завжди проходить через початок координат;

– на проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає, а на проміжку $(-\infty; 0]$ функція спадає;

– оскільки $E(y) = [0;+\infty)$, то для всіх дійсних значень x значення $y \geq 0$. Найменше значення функції дорівнює нулю ($y = 0$ при $x = 0$). Найбільшого значення функція не має.

Враховуючи властивості функції $y = x^{2n+1}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 1).

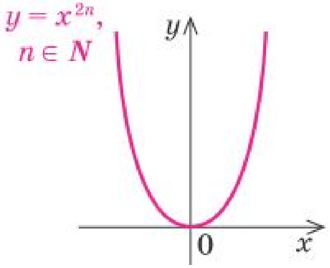


Рис. 1

2. Функція $y = x^{\alpha}$ (α – непарне натуральне число). Якщо α – непарне натуральне число ($\alpha = 2n+1,\ n \in N$), то властивості функції $y = x^{2n+1},\ n \in N$, аналогічні властивостям функції $y = x^3$. Дійсно:

– область визначення функції: $D(y) = R$, область значень: $E(y) = R$;

– функція непарна: $f(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат;

– оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = x^{2n+1}$ завжди проходить через початок координат.

– на всій області визначення функція зростає;

– оскільки область значень функції $E(y) = R = (-\infty;\ +\infty)$, то найменшого і найбільшого значень функція не має;

– проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{2n+1} > 0$, при $x < 0$ значення $y = x^{2n+1} < 0$.

Зауваження. Як відомо з курсу алгебри та геометрії, графіком функції $y = x^1 = x$ є пряма, яка проходить через початок координат (рис. 2), а при інших непарних натуральних α функція $y = x^{2n+1},\ n \in N$, має графік, аналогічний графіку функції $y = x^3$ (рис. 3).

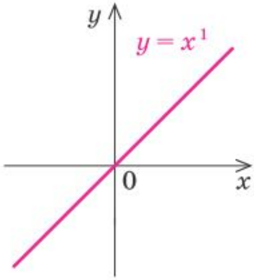


Рис. 2

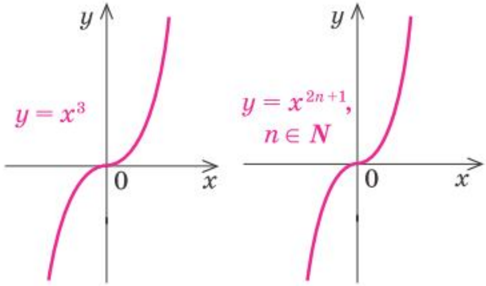


Рис. 3

3. Функція $y = x^{\alpha}$ **(**α **– непарне від'ємне число).** Якщо α – непарне від'ємне число, то функція $y = x^{-(2n+1)}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = \dfrac{1}{x}$.
Дійсно:

– область визначення функції $y = x^{-(2n+1)} = \dfrac{1}{x^{2n+1}}$ $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях x, крім $x = 0$. Область значень функції: $y \neq 0$, тобто $E(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Тому найменшого і найбільшого значень функція не має;
– функція непарна, оскільки при $x \neq 0$ $f(-x) = (-x)^{-(2n+1)} = -x^{-(2n+1)} = -f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно початку координат;
– на проміжку (0; +∞) функція спадає і на проміжку (–∞; 0) функція теж спадає;
– проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y = x^{-(2n+1)} > 0$, при $x < 0$ значення $y = x^{-(2n+1)} < 0$.

Враховуючи властивості функції $y = x^{-(2n+1)}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 4).

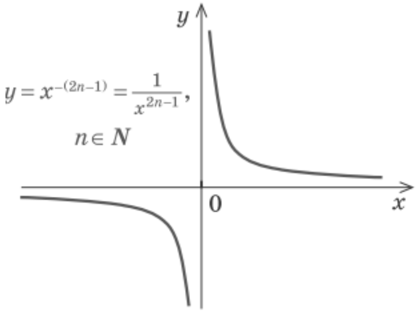


Рис. 4

4. Функція $y = x^{\alpha}$ (α – парне від'ємне число). Якщо α – парне від'ємне число, то функція $y = x^{-2n}$, $n \in N$, має властивості та графік, повністю аналогічні властивостям і графіку функції $y = \frac{1}{x^2}$. Дійсно:

– область визначення $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$ $D(y) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$, оскільки значення цієї функції можна обчислити при будь-яких значеннях *x*, крім *x* = 0. Область значень функції $E(y) = (0;+\infty)$. Тому найменшого і найбільшого значень функція не має;

– функція парна, оскільки при $x \neq 0$ $f(-x) = (-x)^{-2n} = -x^{-2n} = f(x)$. Отже, графік функції симетричний відносно осі *Oy*;

– на проміжку (0; +∞) функція спадає, а на проміжку (–∞; 0) функція зростає;

Враховуючи властивості функції $y = x^{-2n}$, $n \in N$, одержуємо її графік (рис. 5).

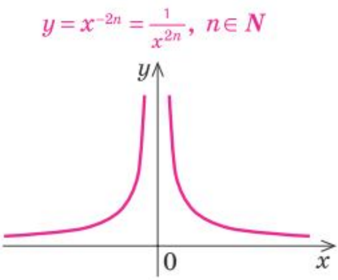


Рис. 5

5. Функція $y = x^{\alpha}$ (α – дробове додатне число).

– функція має *область визначення* $D(y) = [0;+\infty)$, оскільки значення степеня з додатним дробовим показником означено тільки для невід'ємних значень *x*. Область значень функції $E(y) = [0;+\infty)$;

– функція є *ні парною, ні непарною*, оскільки область визначення несиметрична відносно точки 0;

– графік функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) завжди проходить через початок координат, оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$;

– при $x > 0$ значення $y = x^{\alpha} > 0$;

– на всій області визначення функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$) є зростаючою.

Зображуючи графік функції $y = x^{\alpha}$ (α – дробове додатне число), слід враховувати, що при $0 < \alpha < 1$ графік має вигляд, аналогічний графіку $y = \sqrt{x}$ (рис. 6), а при $\alpha > 1$ – аналогічний правій вітці графіка $y = x^2$ (рис. 7).

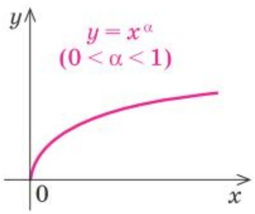


Рис. 6

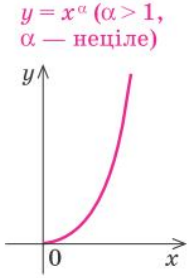


Рис. 7

6. Функція $y = x^{\alpha}$ (α – дробове від'ємне число).

– функція має *область визначення* $D(y) = (0;+\infty)$, оскільки значення степеня з від'ємним дробовим показником означено тільки для додатних значень *x*. Область значень функції $E(y) = (0;+\infty)$;

– функція є *ні парною, ні непарною*, оскільки область визначення несиметрична відносно точки 0;

– графік функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$) не проходить через початок координат, оскільки при $x > 0$ значення $y = x^{\alpha} > 0$;

– при $x > 0$ значення $y = x^{\alpha} > 0$;

– на всій області визначення функція $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$) є спадною.

Враховуючи властивості функції $y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$), одержуємо її графік (рис. 8).

Зауваження. Якщо $\alpha = 0$, то функція $y = x^{\alpha} = x^{0} = 0$ при $x \neq 0$ і її графік – пряма $y = 1$ без точки (0; 1) (рис. 9).

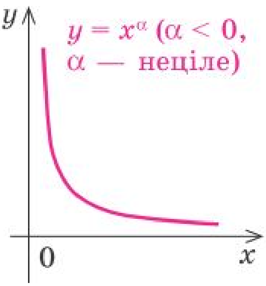


Рис. 8

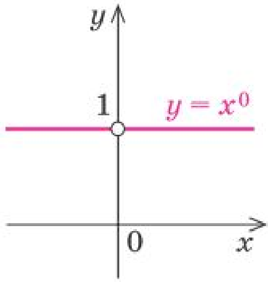


Рис. 9

§4. ІРРАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ

1. Означення ірраціонального рівняння

Ірраціональним називають таке рівняння, ліва і права частини якого є алгебраїчними виразами, хоча б один із яких ірраціональний.

Нагадаємо, що **ірраціональними** називають такі алгебраїчні вирази, які крім дій додавання, віднімання, множення, ділення та піднесення до степеня з натуральним показником містять також і дії добування кореня m-го степеня.

Ірраціональні вирази виду $a\sqrt{b}$ називають також **радикалами**.

Приклади ірраціональних рівнянь:

$$\sqrt{x-3}=7;\ \sqrt[3]{x+5}-\sqrt[3]{x-5}=10;\ \sqrt[3]{x}+x=71.$$

В елементарній алгебрі розглядаються лише такі ірраціональні рівняння, в яких радикали парного степеня припускаються арифметичними (невід'ємними), а непарного степеня — додатними або від'ємними, залежно від знака підкореневого виразу.

Загальний метод розв'язування ірраціонального рівняння полягає в тому, що спочатку ізолюють один радикал, а далі обидві частини рівняння підносять до степеня, потім знову ізолюють радикал і т.д. Будь-яке ірраціональне рівняння після скінченної кількості таких перетворень можна звести до раціонального.

Рівняння, яке дістаємо в результаті, узагалі кажучи, не еквівалентне заданому. Тому, знайшовши розв'язки цього рівняння, потрібно перевірити їх підставленням у дане рівняння і відкинути як сторонні ті з них, які не є розв'язками. Проте якщо обидві частини ірраціонального рівняння підносились до **непарного** степеня, то перевіряти розв'язок не обов'язково, бо в цьому разі прийдемо до рівняння, еквівалентного даному.

Якщо рівняння містить радикали з невідомим у знаменнику, то його потрібно звільнити від знаменника, виконавши відповідні перетворення.

2. Розв'язування найпростіших ірраціональних рівнянь із відшуканням ОДЗ

Перш ніж приступити до розв'язування ірраціонального рівняння, доцільно визначити **область допустимих значень** (ОДЗ) для невідомого. У деяких випадках після цього відпадає потреба в розв'язанні.

Нехай, скажімо, маємо рівняння

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}=3.$$

Для першого радикала ОДЗ становлять значення $x \geq 3$, а для другого $x \leq 2$. Отже, у множині дійсних чисел це рівняння не має розв'язків (не існує дійсних значень x, для яких обидва підкореневі вирази невід'ємні).

Приклад 1. Розв'язати ірраціональне рівняння

$$\left(x^2+6x+5\right)\sqrt{9x-2}=0.$$

Розв'язування. Добуток двох множників дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли принаймні один із них дорівнює нулю. Тому $x^2+6x+5=0$ або $\sqrt{9x-2}=0$.

Отже, маємо: $x_1=-1,\quad x_2=-5,\quad x_3=\frac{2}{9}$.

Значення $x_1=-1$, $x_2=-5$ не входять в ОДЗ $\left(x\ge\frac{2}{9}\right)$ рівняння і не є його коренями. Отже, рівняння має один корінь $x=\frac{2}{9}$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x-2)\sqrt{-x-1}=x-2$.

Розв'язування. Рівняння має очевидний корінь $x=2$, що не входить в ОДЗ $\left(x\in(-\infty,-1)\right)$ і є стороннім. Поділивши обидві частини рівняння на $x-2$, дістанемо:

$$\sqrt{-x-1}=1,\ -x-1=1,\ x=-2.$$

Число $x=-2$ попадає в ОДЗ, яке і є єдиним коренем даного рівняння.

Зауваження. Іноді перш ніж розв'язувати рівняння, доцільно з'ясувати, чи можуть його ліва та права частини бути рівними між собою. Якщо ні, то рівняння, очевидно, не має розв'язків.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x}=\sqrt{x-6}$.

Розв'язування. Знаходимо ОДЗ із нерівностей:

$$\begin{cases}3-x\ge 0\\ x-6\ge 0\end{cases}\qquad\qquad \begin{cases}x\le 3\\ x\ge 6\end{cases}$$

Звідси випливає, що $x\in\varnothing$. Рівняння розв'язків не має.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sqrt{-2-x}=\sqrt[3]{x-4}$.

Розв'язування. Знаходимо ОДЗ: $-2-x\ge 0,\quad x\le -2$. В ОДЗ права частина рівняння від'ємна, а ліва частина невід'ємна. Рівняння не має розв'язків, $x\in\varnothing$.

3. Піднесення обох частин рівняння до квадрата

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt{\left(-x^2-16x-3\right)}=\sqrt{-8x-3}$.

Розв'язування. Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

$$-x^2-16x-3=-3x-3,$$

звідки $x_1=0,\quad x_2=-8$.

Значення $x=0$ не є коренем рівняння, оскільки при $x=0$ обидва підкореневі вирази від'ємні. Отже, – 8 – єдиний корінь рівняння.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$.

Розв'язування. Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

$$1+x\sqrt{x^2+24}=x^2+2x+1,$$

звідки відразу знаходимо $x_1=0$, а далі після відповідних перетворень маємо:

$$\sqrt{x^2+24}=x+2,\quad x^2+24=x^2+4x+4,\quad 20=4x,\quad x_2=5.$$

Підстановкою переконуємося, що знайдені числа є коренями даного рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $3x+2=\sqrt{5x^3+9x^2+12x-36}$.

Розв'язування. Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

$$9x^2+12x+4=5x^3+9x^2+12x-36.$$

Після зведення подібних членів дістаємо:

$$5x^3=40,\quad x^3=8,\quad x=2.$$

Знайдене значення x задовольняє дане рівняння.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt{1+x}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{x+2}$.

Розв'язування. Виконаємо перетворення:

$$\frac{(1+x)-1}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{x+2},\quad \frac{x}{\sqrt{1+x}}=\sqrt{x+2}.$$

Піднісши обидві частини останнього рівняння до квадрата, дістанемо:

$$\frac{x^2}{1+x}=x+2,\quad x^2=x^2+3x+2,\quad x=-\frac{2}{3}.$$

Знайдене значення x не задовольняє рівняння, а отже, $x\in\varnothing$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}=x$.

Розв'язування. Підносимо обидві частини рівняння до квадрата:

$$5+x+2\sqrt{25-x^2}+5-x=x^2, \quad 2\sqrt{25-x^2}=x^2-10,$$
а далі знову підносимо обидві частини перетвореного рівняння до квадрата:

$$4\left(25-x^2\right)=x^4-20x^2+100, \ \ x^4-16x^2=0, \ x_1=0, \ x_2=4, \ x_3=-4.$$

Значення $x_1=0$, $x_3=-4$ не задовольняють дане рівняння. Отже, $x=4$ – єдиний корінь рівняння.

4. Метод заміни

Нерідко заміною підкореневого виразу можна звести ірраціональне рівняння до раціонального.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $\sqrt{2x^2-6x+8}+\sqrt{2x^2-6x+1}=7$.

Розв'язування. Позначивши $\sqrt{2x^2-6x+1}=t\geq 0$, дістанемо рівняння $\sqrt{t^2+7}+t=7,$ або $t^2+7=49-14t+t^2,$ звідки $t=3$.

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

$$2x^2-6x+1=9, \quad x_1=3, \quad x_2=-1.$$

Обидва значення x задовольняють дане рівняння.

Приклад 11. Розв'язати рівняння $x^2+\sqrt{x^2-4x-73}=4x+79$.

Розв'язування. Позначивши $\sqrt{x^2-4x-73}=t\geq 0$, дістанемо рівняння

$$t^2-6+t=0, \text{ або } (t+3)(t-2)=0, \text{ звідки } t=2.$$

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

$$x^2-4x-73=4, \ \ x_1=-7, \quad x_2=11.$$

Обидва значення x задовольняють дане рівняння.

Приклад 12. Розв'язати рівняння $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}+\sqrt{\dfrac{x}{x+3}}=\dfrac{5}{2}$.

Розв'язування. Позначивши $\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}=t$, дістанемо рівняння

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}, \text{ звідки } t_1=2, \quad t_2=\frac{1}{2}.$$

Повертаючись до початкових позначень, маємо:

$$\sqrt{\frac{x+3}{x}}=2, \qquad \frac{x+3}{x}=4, \qquad x_1=1;$$

$$\sqrt{\frac{x+3}{x}}=\frac{1}{2}, \qquad \frac{x+3}{x}=\frac{1}{4}, \qquad x_2=-3.$$

Обидва значення x задовольняють дане рівняння.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2$.

Розв'язування. Позначимо $\sqrt[3]{x-2} = z$, тоді $x = z^3 + 2$, $\sqrt{z^3 + 8} = z + 2$.

Розв'язуючи рівняння: $z^3 + 8 = (z+2)^2$, дістаємо: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = -3$.

Остаточно маємо: $x_1 = 3$, $x_2 = 10$, $x_3 = -6$. Усі значення x задовольняють дане рівняння.

5. Рівняння з кубічними ірраціональностями

Розглянемо ірраціональне рівняння виду

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \sqrt[3]{h(x)}. \tag{1}$$

Піднесемо обидві частини рівняння до куба:

$$f(x) + g(x) + 3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)}\left(\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)}\right) = h(x).$$

Спростимо здобуту рівність, скориставшись (1):

$$3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)}\sqrt[3]{h(x)} = h(x) - f(x) - g(x). \tag{2}$$

Підносимо обидві частини рівняння (2) до куба:

$$27 f(x) g(x) h(x) = \left(h(x) - f(x) - g(x)\right)^3.$$

Якщо рівняння (1) має корінь, то він є і коренем рівняння (2). Проте рівняння (2) може мати корінь, який не є коренем рівняння (1).

Отже, для коренів, які отримані при розв'язуванні рівняння (2), необхідно здійснити перевірку за рівнянням (1).

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{1-x} = 1$.

Розв'язування. Підносимо обидві частини рівняння до куба

$$x - 3 + 3\sqrt[3]{(x-3)^2}\sqrt[3]{1-x} + 3\sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{(1-x)^2} + 1 - x = 1$$

і виконуємо відповідні перетворення

$$x - 3 + 1 - x + 3\sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{1-x} \cdot 1 = 1; \ \sqrt[3]{x-3}\sqrt[3]{1-x} = 1.$$

Підносимо останнє рівняння ще раз до куба і остаточно маємо: $x^2 - 4x + 4 = 0$, $x = 2$.

Цей корінь не задовольняє дане рівняння. Рівняння розв'язків не має.

§5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1. Радіанне вимірювання кутів

Дано прямокутну систему координат Oxy. Нехай $\overline{OA}$ – одиничний вектор, що утворює довільний кут α з віссю x (рис. 1). Точка A міститься на колі одиничного радіуса з центром у початку координат O. Коло радіуса 1 з центром у початку координат будемо називати **одиничним колом**.

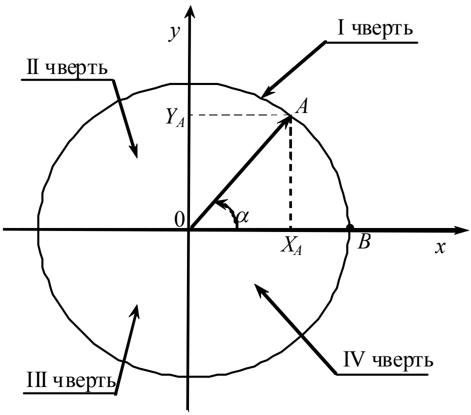


Рис. 1

Кут α вимірюється довжиною дуги BA, яка називається **радіанною мірою** кута BOA. Оскільки радіус R кола дорівнює одиниці, то довжина всього кола $C = 2\pi R = 2\pi$. Прямий кут вимірюється довжиною однієї четвертої частини кола, що дорівнює $\frac{\pi}{2}$.

Якщо розглянути коло довільного радіуса R, то ***1 радіан*** *– це центральний кут, що відповідає дузі, довжина якої дорівнює радіусу кола.*

Отже, якщо кут AOB дорівнює одному радіану (рис. 1), то це означає, що $\cup AB = OA = R$.

Наведемо формули переведення градусної міри у радіанну і навпаки:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} a, \qquad a = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha,$$

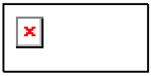
де α – градусна міра кута, a – радіанна міра кута.

Таким чином одержуємо:

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180}\, радіан, \qquad 1\, радіан = \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx 57^{\circ}.$$

Наведемо таблицю відповідності деяких кутів у радіанній і градусній мірі.

Кут у радіанах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
Кут у градусах	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$

Осі координат розбивають координатну площину на чотири частини, які називаються **чвертями**. Говорять, що кут α належить першій чверті, якщо $0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$; кут α належить другій чверті, якщо $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$; кут α належать третій чверті, якщо $\pi \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$; кут α належить четвертій чверті, якщо  (рис. 1).

2. Означення тригонометричних функцій

Розглянемо спочатку прямокутний трикутник *ABC*. Позначимо сторони прямокутного трикутника через a, b, c, де c – гіпотенуза (рис. 2), $\angle C$ – прямий.

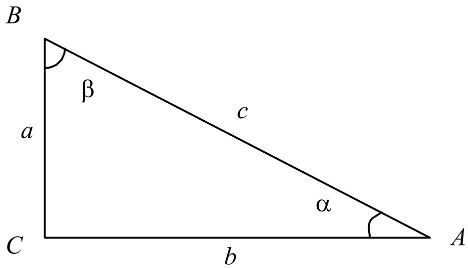


Рис. 2

В такому трикутнику вводять наступні співвідношення

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha = \cos\beta, \quad \frac{b}{c} = \cos\alpha = \sin\beta, \quad \frac{a}{b} = tg\alpha = ctg\beta, \quad \frac{b}{a} = ctg\alpha = tg\beta.$$

Візьмемо коло радіуса R з центром у початку координат. Позначимо точку кола на додатній півосі абсцис через P_0 (рис. 3). Потрібні нам кути будемо утворювати поворотом радіуса OP_0 навколо точки O. Нехай у результаті повороту на кут α навколо точки O радіус OP_0 займе положення OP_α (кажуть, що при повороті на кут α радіус OP_0 переходить у радіус OP_α, а точка P_0 переходить у точку P_α). Будемо вважати, що при $\alpha > 0$ радіус OP_0 повертається проти годинникової стрілки, а при $\alpha < 0$ – за нею.

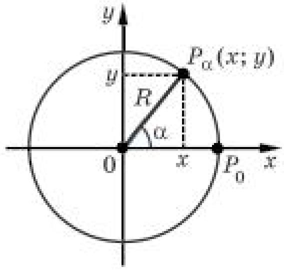


Рис. 3

Нехай точка P_α має координати $(x; y)$. Тоді:

синусом кута α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\sin\alpha = \dfrac{y}{R}$;

косинусом кута α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ кола до його радіуса: $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$;

тангенсом кута α називається відношення ординати точки $P_\alpha(x; y)$ кола до її абсциси: $tg\alpha = \dfrac{y}{x}$;

котангенсом кута α називається відношення абсциси точки $P_\alpha(x; y)$ кола до її ординати: $ctg\alpha = \dfrac{x}{y}$.

Як і для тригонометричних функцій гострих кутів, значення $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$ залежать тільки від міри кута α і не залежать від R. Зручно вибрати $R = 1$, що дозволить дещо спростити наведені означення тригонометричних функцій.

Синусом кута α *називається ордината точки* $P_\alpha(x; y)$ *одиничного кола:* $\sin\alpha = y$.

Косинусом кута α *називається абсциса точки* $P_\alpha(x; y)$ *одиничного кола:* $\cos\alpha = x$.

Тангенсом кута α *називається відношення ординати точки* $P_\alpha(x;y)$ *одиничного кола до її абсциси, тобто відношення* $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Котангенсом кута α *називається відношення абсциси точки* $P_\alpha(x;y)$ *одиничного кола до її ординати, тобто відношення* $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Введені означення дозволяють розглядати не тільки тригонометричні функції кутів, а й тригонометричні функції числових аргументів, якщо розглядати тригонометричні функції числа α як відповідні тригонометричні функції кута в α радіан. Наприклад, синус числа α – це синус кута в α радіан:

$$\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\ \text{радіан}\right) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Наведемо таблицю значень функцій $\sin x$, $\cos x$, $tg\ x$, $ctg\,x$.

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\ \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—
$ctg\,\alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

3. Властивості тригонометричних функцій

Знаки тригонометричних функцій легко визначити, виходячи з означення цих функцій.

Наприклад, $\sin\alpha$ – це ордината відповідної точки P_α одиничного кола. Тоді значення $\sin\alpha$ буде додатним, якщо точка P_α має додатну ординату, а це буде тоді, коли точка P_α знаходиться в I або II чверті (рис. 4). Якщо точка P_α знаходиться в III або IV чверті, то її ордината від’ємна, і тому $\sin\alpha$ теж від’ємний.

Аналогічно, враховуючи, що $\cos\alpha$ – це абсциса відповідної точки P_α, одержуємо, що $\cos\alpha > 0$ в I і IV чвертях (абсциса точки P_α додатна) і $\cos\alpha < 0$ в II і III чвертях (абсциса точки P_α від’ємна) (рис. 5).

Оскільки $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ і $ctg\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, то $tg\alpha > 0$ і $ctg\alpha > 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають однакові знаки, тобто в I і III чвертях, $tg\alpha < 0$ і $ctg\alpha < 0$ там, де $\sin\alpha$ і $\cos\alpha$ мають різні знаки, тобто в II і IV чвертях (рис. 6).

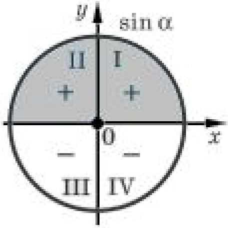


Рис. 3

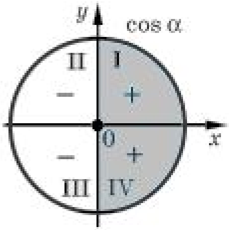


Рис. 5

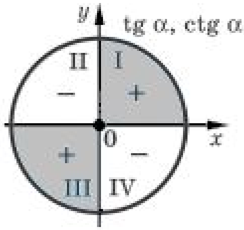


Рис. 6

Парність і непарність тригонометричних функцій. Зазначимо, що на одиничному колі точки P_α і $P_{-\alpha}$ розміщено симетрично відносно осі *Ox* (рис. 7). Отже, ці точки мають однакові абсциси і протилежні ординати. Тоді $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Таким чином, $\cos x$ **– парна функція**, а $\sin x$ **– непарна**.

Оскільки $tg(-\alpha) = \dfrac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$, $ctg(-\alpha) = \dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin(-\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = -ctg\alpha$, то tgx **і** $ctgx$ **– непарні функції**.

Парність і непарність тригонометричних функцій можна використовувати для обчислення значень тригонометричних функцій від’ємних кутів.

Наприклад, $\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -tg\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

Періодичність тригонометричних функцій. Для опису повторюваних (циклічних) процесів використовують так звані періодичні функції.

Означення. *Функція* $y = f(x)$ *називається* ***періодичною*** *з періодом* $T \neq 0$*, якщо для будь-якого* x *із області визначення функції* *числа* $(x-T)$ *і* $(x+T)$ *також належать області визначення і виконується рівність* $f(x-T)=f(x+T)=f(x)$.

Враховуючи, що на одиничному колі числам (кутам) α і $\alpha+2\pi k$, де $k\in Z$, відповідає та сама точка (рис. 8), одержуємо

$$\sin(\alpha+2\pi k)=\sin\alpha\,,\ \cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha\,.$$

При $k=1$ одержуємо, що $T=2\pi$ – це **найменший додатний період функцій** $\sin x$ **і** $\cos x$.

Якщо врахувати, що на одиничному колі точки P_α і $P_{\alpha+\pi}$ є діаметрально протилежними з протилежними за знаком відповідним координатами (рис. 9), то за означенням $tg\alpha$ і $ctg\alpha$ маємо $tg(\alpha+\pi)=tg\alpha$, $ctg(\alpha+\pi)=ctg\alpha$. Тобто

$$tg(\alpha+\pi k)=tg\alpha\,,\ ctg(\alpha+\pi k)=ctg\alpha\,.$$

Найменшим додатним періодом для функцій tgx **і** $ctgx$ **є** $T=\pi$.

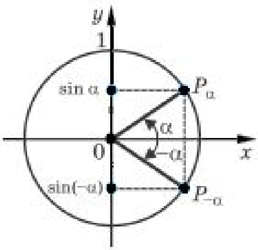


Рис. 7

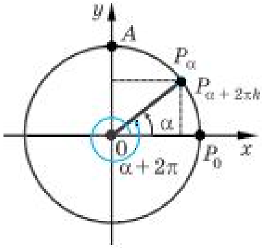


Рис. 8

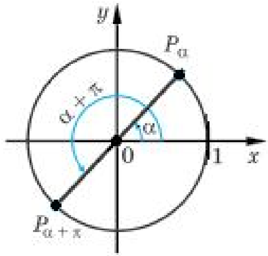


Рис. 9

4. Графіки функцій синуса, косинуса, тангенса і котангенса та їх властивості

Для **побудови графіка функції** $y=\sin x$ користуємося тим, що значення синуса – це ордината відповідної точки одиничного кола. На рисунку 10 показана побудова графіка функції $y=\sin x$ на проміжку $[0;\pi]$.

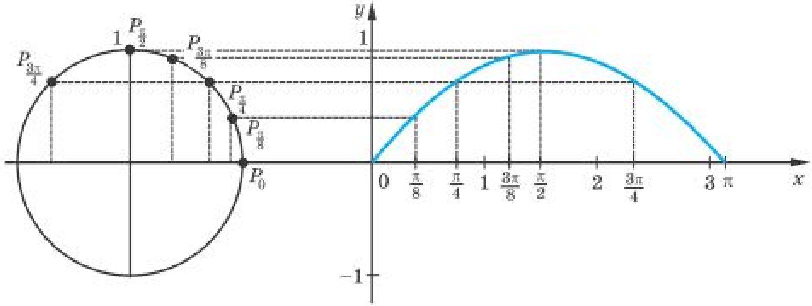


Рис. 10

Враховуючи непарність функції $\sin x$ (її графік симетричний відносно початку координат) та її періодичність (повторюємо вид графіка на кожному проміжку довжиною 2π), одержуємо графік, наведений на рисунку 11, який називається **синусоїдою**.

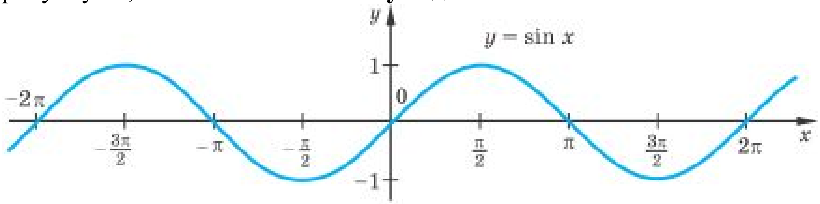


Рис. 11

З графіків бачимо, що виконуються такі властивості функції $y = \sin x$:

1) *Область визначення*: $D(\sin x) = R$.

2) *Область значень*: $E(\sin x) = [-1;1]$. Як бачимо, *найбільше значення функції* $\sin x$ дорівнює одиниці при $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$. *Найменше значення функції* $\sin x$ дорівнює мінус одиниці при $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

3) Як було показано вище *синус – непарна функція*, тобто $\sin(-x) = -\sin x$ і її графік симетричний відносно початку координат.

4) *Синус – періодична функція* з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

5) Графік функції перетинає вісь Ox в точках з абсцисою $x = \pi k,\ k \in Z$.

6) *Проміжки знакосталості*. Враховуючи періодичність:

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k),\ k \in Z$;

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k),\ k \in Z$.

7) *Проміжки зростання і спадання*. Враховуючи періодичність:

$\sin x$ зростає в кожному з проміжків $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$ і спадає в кожному з проміжків $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k\right],\ k \in Z$.

Для **побудови графіка функції** $y = \cos x$ використаємо формулу $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$, яка буде обґрунтована в наступному параграфі. Враховуючи це, графік функції $y = \cos x$ можна одержати із графіка функції $y = \sin x$ його паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$. Одержуємо графік, який називається **косинусоїдою** (рис. 12).

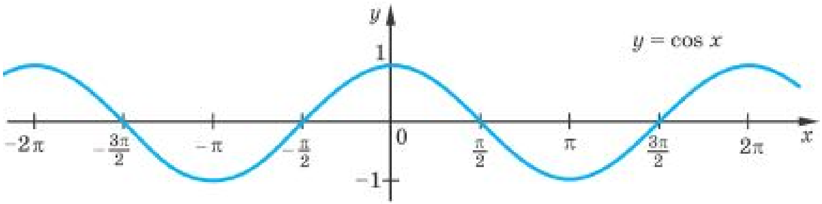


Рис. 12

Властивості функції $y = \cos x$:

1) *Область визначення*: $D(\cos x) = R$.

2) *Область значень*: $E(\cos x) = [-1; 1]$. Як бачимо, *найбільше значення функції* $\cos x$ дорівнює одиниці при $x = 2\pi k,\ k \in Z$. *Найменше значення функції* $\cos x$ дорівнює мінус одиниці при $x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$.

3) Як було показано вище *косинус – парна функція*, тобто $\cos(-x) = \cos x$ і її графік симетричний відносно осі координат Oy.

4) *Косинус – періодична функція* з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

5) Графік функції перетинає вісь Ox в точках з абсцисою $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

6) *Проміжки знакосталості*. Враховуючи періодичність:

$$\cos x > 0 \text{ при } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z;$$

$$\cos x < 0 \text{ при } x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z.$$

7) *Проміжки зростання і спадання*. Враховуючи періодичність: $\cos x$ зростає в кожному з проміжків $[\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ і спадає в кожному з проміжків $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$.

Для побудови графіків функцій $y = tgx$ і $y = ctgx$ введемо поняття ліній тангенсів і котангенсів. Проведемо дотичну до одиничного кола у точці (1; 0), яка називається **лінією тангенсів**. Нехай вектор $\overline{OA}$ утворює кут α з віссю x (рис. 13). Продовжимо вектор $\overline{OA}$ до перетину з лінією тангенсів у точці *C*. Для ординати y_C точки перетину *C* маємо: $y_C = tg\alpha$.

Аналогічно проводимо дотичну до одиничного кола в точці (0; 1). Ця дотична називається **лінією котангенсів**. Продовжимо вектор $\overline{OA}$ до перетину з лінією котангенсів в точці D (рис. 14).

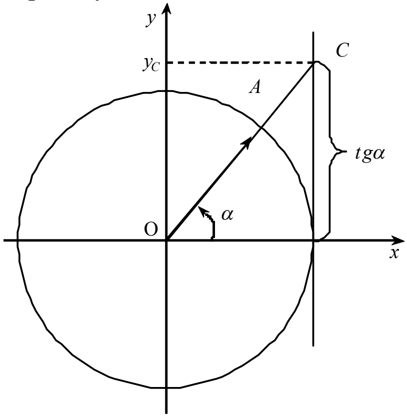


Рис. 13

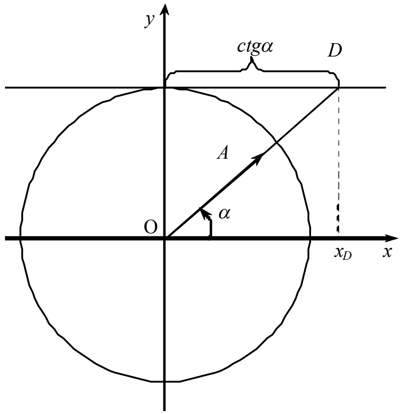


Рис. 14

Для абсциси x_D точки перетину D маємо: $x_D = ctg\alpha$.

Враховуючи те, що значення тангенса – це ордината відповідної точки лінії тангенсів, то графік функції $y = tgx$ на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ зображено на рисунку 15.

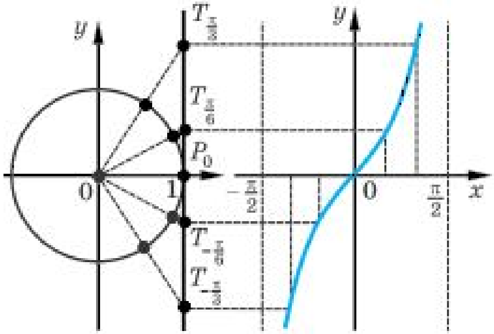


Рис. 15

Враховуючи періодичність цієї функції (з періодом π), повторюємо вигляд графіка на кожному проміжку довжиною π (тобто паралельно переносимо графік уздовж осі Ox на πk , де k – ціле число).

Одержуємо графік, наведений на рисунку 16, який називається **тангенсоїдою**.

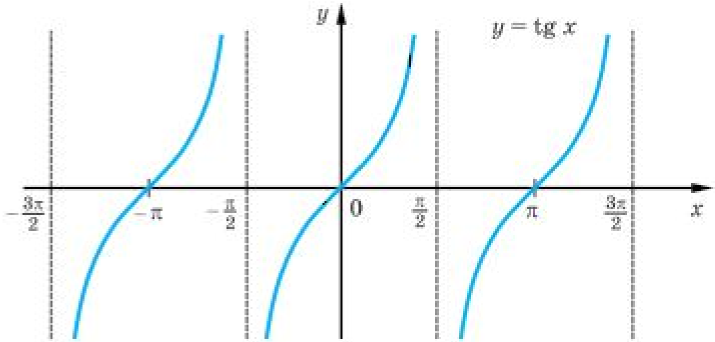


Рис. 16

Властивості функції $y = tgx$:

1) *Область визначення*: $D(tgx) = R \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \right\}$.

2) *Область значень*: $E(tgx) = R$. Бачимо, що *найбільшого та найменшого значення функції tgx* не має.

3) Як було показано вище *тангенс – непарна функція*, тобто $tg(-x) = -tgx$ і її графік симетричний відносно початку координат.

4) *Тангенс – періодична функція* з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $tg(x + \pi) = tgx$.

5) Графік функції перетинає вісь Ox в точках з абсцисою $x = \pi k,\ k \in Z$.

6) *Проміжки знакосталості*. Враховуючи періодичність:

$tgx > 0$ при $x \in \left(\pi k; \dfrac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$;

$tgx < 0$ при $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right),\ k \in Z$.

7) *Проміжки зростання і спадання*. Враховуючи періодичність: tgx зростає в кожному з проміжків $\left(-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in Z$.

Для побудови графіка функції $y = ctgx$ скористаємося формулою $tg\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -ctgx$, тобто $ctgx = -tg\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$, яку обґрунтуємо в наступному параграфі. Тому графік функції $y = ctgx$ можна одержати з графіка функції $y = tgx$ паралельним перенесенням уздовж осі Ox на $\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ і симетричним відображенням одержаного графіка відносно осі Ox. Отримуємо графік, який називається **котангенсоїдою** (рис. 17).

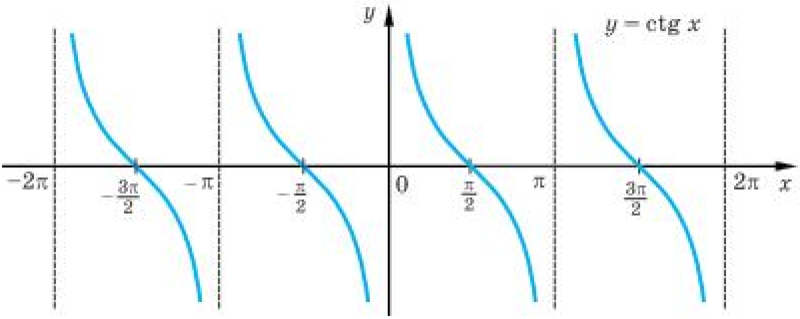


Рис. 17

Властивості функції $y = ctgx$:

1) *Область визначення*: $D(ctgx) = R \setminus \{\pi k, k \in Z\}$.

2) *Область значень*: $E(ctgx) = R$. Бачимо, що *найбільшого та найменшого значення функції* $ctgx$ не має.

3) Як було показано вище *котангенс – непарна функція*, тобто $ctg(-x) = -ctgx$ і її графік симетричний відносно початку координат.

4) *Котангенс – періодична функція* з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $ctg(x + \pi) = ctgx$.

5) Графік функції перетинає вісь Ox в точках з абсцисою $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

6) *Проміжки знакосталості*. Враховуючи періодичність:

$ctgx > 0$ при $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right),\ k \in Z$;

$ctgx < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right),\ k \in Z$.

7) *Проміжки зростання і спадання*. Враховуючи періодичність: $ctgx$ зростає в кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k),\ k \in Z$.

§ 6. СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ

1. Основні тригонометричні тотожності

На рисунку 1 § 5 зображене одиничне коло, тобто коло радіуса 1 з центром в початку координат. З трикутника $OA_X A$ за теоремою Піфагора випливає рівність

$$\left|OA_x\right|^2+\left|OA_y\right|^2=\left|OA\right|^2,$$

або

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1. \qquad (1)$$

Це співвідношення називають **основною тригонометричною тотожністю**.

З відомих співвідношень $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ маємо рівність $tg\alpha\cdot ctg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, тобто

$$tg\,\alpha\cdot ctg\alpha=1. \qquad (2)$$

За допомогою цих співвідношень і основної тригонометричної тотожності одержуємо:

$$1+tg^2\alpha=1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha},\text{ тобто}$$

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}. \qquad (3)$$

Аналогічно можна отримати співвідношення:

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}. \qquad (4)$$

Рівності (1)-(4) дають змогу знаходити значення тригонометричних функцій $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $tg\alpha$, $ctg\alpha$, коли відомі значення однієї з них.

Приклад 1. Дано $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}\le\alpha\le\pi$. Знайти $\cos\alpha$, $tg\,\alpha$, $ctg\,\alpha$.

Розв'язування. Оскільки в другій четверті $\cos\alpha<0$, то за тотожністю (1) $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$.

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} : \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4}.$$ За співвідношенням (2) $$ctg\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}.$$

2. Формули суми та різниці кутів

Нехай точки *A*, *B* містяться на одиничному колі $x^2 + y^2 = 1$ і вектори $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ утворюють кути α, β з віссю x (рис. 1).

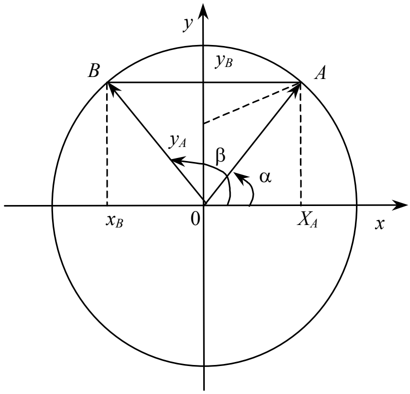


Рис. 1

Знаходимо відстань $|AB|$:

$$|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = (\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 =$$
$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta =$$
$$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta).$$

З теореми косинусів для трикутника *OAB* знаходимо

$$|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA|\,|OB|\cos(\beta - \alpha) = 2 - 2\cos(\beta - \alpha).$$

Порівнюючи результати, дістаємо формулу:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (5)$$

Замінивши знак кута β у формулі (5) на протилежний, дістанемо:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \qquad (6)$$

Замінимо у формулі (5) кут α на кут $\frac{\pi}{2} - \alpha$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta .$$

Здобута рівність за допомогою формул зведення набирає вигляду:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta . \qquad (7)$$

Замінивши у формулі (7) кут β на $-\beta$, дістанемо:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta . \qquad (8)$$

Для функції $y=tgx$ маємо:

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta} .$$

Поділивши чисельник і знаменник на добуток $\cos\alpha\cos\beta$, дістанемо формулу додавання кутів:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\ tg\beta} .$$

Замінивши β на $-\beta$, отримаємо формулу

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\ tg\beta} .$$

При $\beta=\alpha$ маємо **формули подвійного кута**

$$\begin{aligned}&\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha ,\\&\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha .\end{aligned} \qquad (9)$$

Додаючи до останньої формули (9) та віднімаючи від неї тотожність $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, дістаємо формули:

$$\begin{aligned}&\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1 ,\\&\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha ,\end{aligned} \qquad (10)$$

які можна записати у вигляді:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\quad \sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2} . \qquad (11)$$

Формули (11) називають **формулами зниження степеня**.

Приклад 2. Знайти вирази для $\cos 3\alpha$, $\sin 3\alpha$.

Розв'язування. $\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha=$

$$=\left(2\cos^2\alpha-1\right)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha=$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\left(1-\cos^2\alpha\right)\cos\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

Аналогічно дістаємо:

$$\cos 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha + (1 - 2\sin^2\alpha)\sin\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha .$$

Замінивши α на $\frac{\alpha}{2}$ у формулах (11), дістанемо:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}; \quad \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}; \quad tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

Ці формули називають **формулами половинного кута**.

3. Формули зведення

Часто доводиться зводити тригонометричні функції від аргументів виду $k\pi \pm \alpha$, $\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha$ ($k \in Z$) до тригонометричних функції від аргумент α.

Наприклад, оскільки $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 1$, маємо:

$$\cos(\pi - \alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha ,$$
$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\pi\cos\alpha - \cos\pi\sin\alpha = \sin\alpha .$$

Аналогічно виводяться формули:

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha , \quad \sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha ,$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha,$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ctg\alpha, \quad ctg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = tg\alpha .$$

Наведені формули називають **формулами зведення**.

Найчастіше застосовувані формули зведення вміщено в таблиці.

$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi \pm \alpha$
$\cos\beta = \pm\sin\alpha$	$\cos\beta = -\cos\alpha$	$\cos\beta = \pm\sin\alpha$	$\cos\beta = \cos\alpha$
$\sin\beta = \cos\alpha$	$\sin\beta = \pm\sin\alpha$	$\sin\beta = -\cos\alpha$	$\sin\beta = \pm\sin\alpha$
$tg\ \beta = \pm ctg\ \alpha$	$tg\ \beta = \pm tg\ \alpha$	$tg\ \beta = \pm ctg\ \alpha$	$tg\ \beta = \pm tg\ \alpha$
$ctg\ \beta = \pm tg\ \alpha$	$ctg\ \beta = \pm ctg\ \alpha$	$ctg\ \beta = \pm tg\ \alpha$	$ctg\ \beta = \pm ctg\ \alpha$

Для зведення тригонометричних функцій можна використовувати таке легко запам'ятовуване правило.

Якщо до числа α додається число $k\pi$, $k \in Z$, (тобто число, яке зображується на горизонтальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції не змінюється, а якщо додається число

$(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ *(тобто число, яке зображується на вертикальному діаметрі одиничного кола), то назва заданої функції змінюється на подібну:*

$$\sin \Leftrightarrow \cos\ , \quad \mathrm{tg} \Leftrightarrow \mathrm{ctg}\ .$$

Знак перед зведеною функцією від α *визначається знаком початкового виразу для кута* α *в першій четверті.*

Наприклад, $\sin\left(5\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$, $tg\left(5\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\ \alpha$, оскільки кут $5\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ міститься в другій четверті, де синус додатний, а тангенс від'ємний.

4. Перетворення добутків тригонометричних функцій на суми

Виконуючи формули косинуса суми та різниці кутів

$$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

почленно додавши та віднявши дістаємо:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos\left(\alpha-\beta\right)+\cos\left(\alpha+\beta\right)}{2},$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)}{2}.$$

Аналогічно, додавши почленно формули

$$\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

дістаємо:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)}{2}.$$

Приклад 3. Обчисліть вираз $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ$.

Розв'язування. $16\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 60^\circ\sin 80^\circ=$

$$=16\frac{\cos 20^\circ-\cos 60^\circ}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 80^\circ=2\sqrt{3}\left(2\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\sin 80^\circ\right)=$$

$$=2\sqrt{3}\left(\sin 100^\circ+\sin 60^\circ-\sin 80^\circ\right)=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\left(180^\circ-80^\circ\right)-\sin 80^\circ\right)=3.$$

5. Формули додавання та віднімання тригонометричних функцій

Позначимо у формулах (5), (6)

$$\alpha-\beta=x, \quad \alpha+\beta=y .$$

Тоді, додаючи почленно ці рівності, одержуємо:

$$\alpha=\frac{x+y}{2}, \quad \beta=\frac{y-x}{2}$$

і зазначені формули набирають вигляду:

$$\cos\ x+\cos\ y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{y-x}{2} ,$$

$$\cos x-\cos y=2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} .$$

Аналогічно згідно з формулами (7), (8) маємо:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} ,$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} .$$

Приклад 4. Обчисліть $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ$.

Розв'язування. $\cos 75^\circ+\cos 15^\circ=2\cos\dfrac{75^\circ+15^\circ}{2}\cos\dfrac{15^\circ-75^\circ}{2}=$

$$=2\cos 45^\circ\cos(-60^\circ)=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Для суми та різниці тангенсів дістанемо:

$tgx\pm tgy=\dfrac{\sin x}{\cos x}\pm\dfrac{\sin y}{\cos y}=\dfrac{\sin x\cos y\pm\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=\dfrac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$, тоді

$$tg\ x\pm tg\ y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y} .$$

§ 7. ОБЕРНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1. Графік і властивості функції $y = arcsin\, x$.

Функція $y = sin\, x$ зростає на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і набуває всіх своїх значень від – 1 до 1. Тому вона має на цьому проміжку обернену до неї функцію, яка позначається $y = arcsin\, x$ з областю визначення $[-1;1]$ та множиною значень $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вона називається арксинусом.

Функція $y = arcsin\, x$ монотонно зростає на відрізку $[-1;1]$, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \sin x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 1).

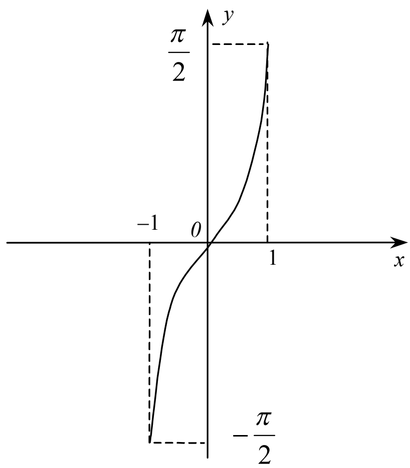


Рис. 1.

Означення. ***Арксинусом*** *x називається кут з проміжку* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$*, синус якого дорівнює x , тобто*

$$sin\left(arcsin\, x\right) = x\, ,\ -1 \le x \le 1\, . \qquad (2)$$

Приведемо деякі числові значення $arcsin\, x$:

$$arcsin\,0 = 0\,,\; arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,,\; arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}\,,\; arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}\,,$$

$$arcsin\,1 = \frac{\pi}{2}\,.$$

Функція $y = arcsin\,x$ – непарна, тобто

$$arcsin(-x) = -arcsin\,x\,.$$

Користуючись означенням арксинуса можна обґрунтувати наступні формули:

$$sin\,(arcsin\,x) = x\,,\; |x| \le 1\,,$$

$$cos\,(arcsin\,x) = \sqrt{1-\sin^2(arcsin\,x)} = \sqrt{1-x^2}\,,\; |x| \le 1\,,$$

$$tg\,(arcsin\,x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,,\; -1 < x < 1\,,$$

$$ctg\,(arcsin\,x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\,,\; x \ne 0\,,\; |x| \le 1\,.$$

Приклад 1. Обчислити $ctg\left(arcsin\frac{1}{3}\right)$.

Розв'язування. Нехай $arcsin\frac{1}{3} = \varphi$. За графіком арксинуса одержуємо, що $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\varphi = \frac{1}{3}$. Враховуючи, що $ctg\varphi \ge 0$, маємо: $ctg\varphi = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\varphi} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $arcsin\,x > \frac{\pi}{6}$.

Розв'язування. Використавши означення арксинуса, маємо: $sin\,(arcsin\,x) > sin\frac{\pi}{6}$; $x > \frac{1}{2}$. Оскільки є обмеження $|x| \le 1$, то одержимо відповідь: $\frac{1}{2} < x \le 1$.

2. Графік і властивості функції $y = arccos\, x$ **.**

Функція $y = cos\, x$ зростає на проміжку $[0; \pi]$. Обернена до неї функція $y = arccos\, x$, $x \in [-1;1]$ називається арккосинусом.

Функція $y = arccos\, x$ монотонно спадає на відрізку $[-1;1]$, і її графік можна одержати з графіка функції $y = \cos x$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 2).

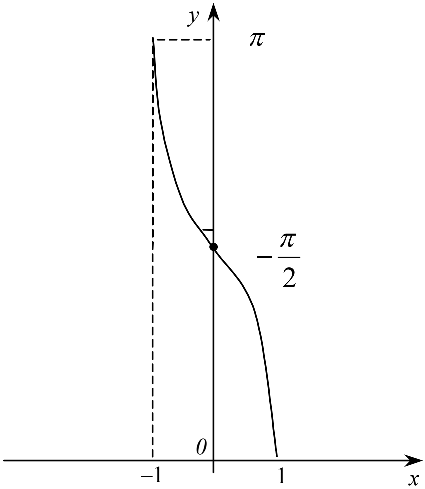


Рис. 2.

Означення. ***Арккосинусом*** *x називається кут з проміжку* $[0; \pi]$, *косинус якого дорівнює x , тобто*

$$cos\,(arccos\, x), \; -1 \le x \le 1 .$$

У силу симетрії графіка щодо точки $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ виконується рівність

$$arccos\, x + arccos\,(-x) = \pi ,$$

звідки отримуємо формулу

$$arccos\,(-x) = \pi - arccos\, x .$$

З порівняння графіків $y = arcsin\, x$, $y = arccos\, x$ знаходимо рівність

$$arcsin\, x + arccos\, x = \frac{\pi}{2}, \; |x| \le 1 .$$

Приведемо деякі числові значення $arccos\, x$:

$$arccos\,0 = \frac{\pi}{2},\ arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3},\ arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4},\ arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$
$$arccos\,1 = 0\,.$$

Приведемо формули:

$$cos\left(arccos\,x\right) = x\,;\ |x| \le 1\,;$$

$$sin\left(arccos\,x\right) = \sqrt{1 - cos^2\left(arccos\,x\right)} = \sqrt{1 - x^2}\ ;\ |x| \le 1\,;$$

$$tg\left(arccos\,x\right) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x},\ x \ne 0\,,\ |x| \le 1$$

$$ctg\left(arccos\,x\right) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\ ,\ |x| < 1\,.$$

Приклад 3. Обчислити значення виразу $cos\left(arccos\frac{1}{3} + arcsin\frac{1}{4}\right)$.

Розв'язування. $cos\left(arccos\frac{1}{3} + arcsin\frac{1}{4}\right) =$

$$= cos\left(arccos\frac{1}{3}\right)cos\left(arcsin\frac{1}{4}\right) - sin\left(arccos\frac{1}{3}\right)sin\left(arcsin\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{1 - \frac{1}{4^2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{3^2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{8}}{12}\ .$$

3. Графік і властивості функції $y = arctg\,x$

Функція $y = tg\,x$ зростає на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Тоді вона має обернену функцію $y = arctg\,x$, $x \in \left(-\infty, \infty\right)$, яка називається арктангенсом.

Функція $y = arctg\,x$ монотонно зростає, непарна, і її графік можна одержати з графіка функції $y = tgx$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення відносно прямої $y = x$ (рис. 3).

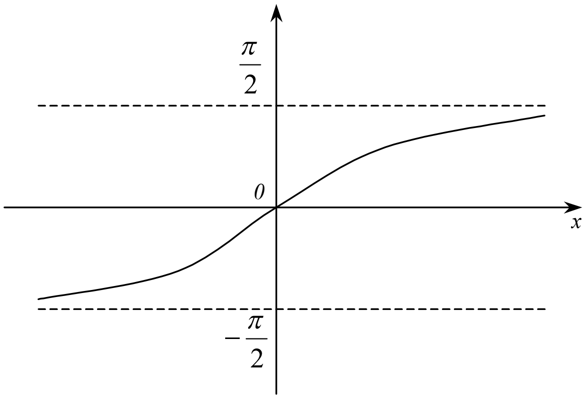


Рис. 3.

Означення. ***Арктангенсом*** *x називається кут з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює x, тобто*

$$tg(arctg\,x)=x\,,\ -\infty<x<\infty\,.$$

Функція $y=arctg\,x$ приймає наступні значення:

$$arctg\,0=0\,,\ arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}\,,\ arctg\,1=\frac{\pi}{4}\,,\ arctg\,\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\,.$$

Приведемо деякі формули:

$$sin\,(arctg\,x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,;\ -\infty<x<\infty\,,$$

$$cos\,(arctg\,x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,;\ -\infty<x<\infty\,,$$

$$tg\,(arctg\,x)=x\,;\ -\infty<x<\infty\,,$$

$$ctg\,(arctg\,x)=\frac{1}{x}\,;\ x\neq 0\,,\ -\infty<x<\infty\,.$$

4. Графік і властивості функції $y=\operatorname{arcctg}x$

Функція $y=\operatorname{ctg}x$ спадає на проміжку $(0;\pi)$. Обернена до неї функція $y=\operatorname{arctg}x$ $(-\infty<x<\infty)$ називається арккотангенсом.

Функція $y=\operatorname{arcctg}x$ монотонно спадає, і її графік можна одержати з графіка функції $y=ctgx$ (на заданому проміжку) за допомогою симетричного відображення його відносно прямої $y=x$ (рис. 4).

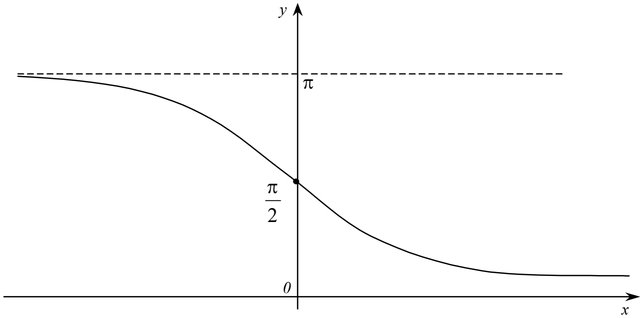


Рис. 4.

Означення. ***Арккотангенсом*** *x називається кут з проміжку $(0;\pi)$, котангенс якого дорівнює x, тобто*

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x) = x,\ -\infty < x < \infty .$$

З графіків 3, 4 видно, що завжди виконуються рівності

$$\mathrm{arctg}\,x + \mathrm{arcctg}\,x = \frac{\pi}{2},$$

$$\mathrm{arcctg}(-x) = \pi - \mathrm{arcctg}\,x .$$

Приведемо табличні значення арккотангенса:

$$\mathrm{arcctg}\,0 = \frac{\pi}{2},\ \mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3},\ \mathrm{arcctg}\,1 = \frac{\pi}{4},\ \mathrm{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6},$$

а також формули для тригонометричних функцій

$$\sin(\mathrm{arcctg}\,x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}},\ -\infty < x < \infty,$$

$$\cos(\mathrm{arcctg}\,x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\ -\infty < x < \infty,$$

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arcctg}\,x) = \frac{1}{x},\ x \neq 0,\ -\infty < x < \infty,$$

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,x) = x\ ,\ -\infty < x < \infty .$$

Приклад 4. Обчислити значення виразу $\cos(\mathrm{arcctg}\,7 + \mathrm{arcctg}\,8)$.

Розв'язування. $\cos(\mathrm{arcctg}\,7 + \mathrm{arcctg}\,8) = \cos(\mathrm{arcctg}\,7)\cos(\mathrm{arcctg}\,8) -$

$$-\sin(\mathrm{arcctg}\,7)\sin(\mathrm{arcctg}\,8) = \frac{7}{\sqrt{1+7^2}}\cdot\frac{8}{\sqrt{1+8^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+7^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+8^2}} = \frac{11}{\sqrt{130}} .$$

§ 8. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

1. Найпростіші тригонометричні рівняння

Обернені тригонометричні функції використовуються для розв'язування тригонометричних рівнянь. Приведемо способи розв'язування найпростіших тригонометричних рівнянь.

I. Рівняння $\cos x = a$**,** $|a| \le 1$ має розв'язки, які можна визначити формулою

$$x = \pm \arccos a + 2k\pi \ , \ k \in Z \qquad (1)$$

Розв'язування можна пояснити на рис. 1.

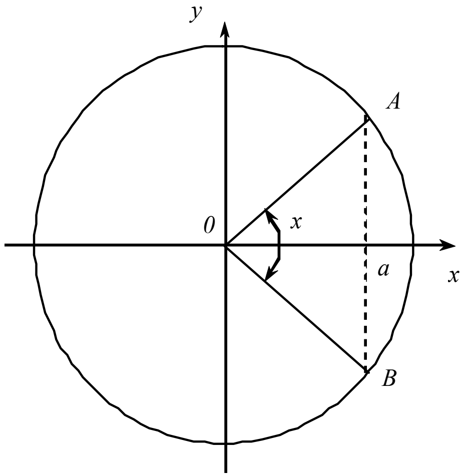


Рис. 1.

За традицією невідомий кут позначається буквою x. У межах $0 \le x \le \pi$ рівняння $\cos x = a$ має корінь $x = \arccos a$ (відповідає точці *A*). У межах $-\pi \le x \le 0$ є інший, симетричний відносно осі *Ox* корінь $x = -\arccos a$ (відповідає точці *B*). При $a = \pm 1$ ці симетричні корені збігаються. Щоб не було повторення коренів при $a = \pm 1$ розв'язки визначають по формулах:

$$\cos x = 1 \ , \ x = 2\pi k \ , \ k \in Z \ ,$$

$$\cos x = -1 \ , \ x = \pi + 2\pi k \ , \ k \in Z \ .$$

При $a = 0$ розв'язок рівняння $\cos x = 0$ можна записати у виді (1)

$$x = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ , \ k \in Z$$

чи в рівносильній формі

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in Z\ .$$

До розв'язків завжди варто додавати доданок $2k\pi$, $k \in Z$, що не змінює значення $\cos x$.

При $|a| > 1$ рівняння $\cos x = a$ не має дійсних розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

Розв'язування. По формулі (1) знаходимо $3x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2k\pi$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язування. Оскільки $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$, то одержимо

$$2x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\ ,\ x = \pm \frac{5\pi}{12} + k\pi\ ,\ k \in Z\ .$$

II. Рівняння $\sin x = a$ **,** $|a| \le 1$ має розв'язок

$$x = (-1)^k \arcsin a + k\pi\ ,\ k \in Z \qquad (2)$$

Розв'язок можна пояснити на рис. 2. Кути, визначені розв'язком розташовані симетрично відносно осі *Oy* (їм відповідають точки *A*, *B*).

Рівняння $\sin x = \pm 1$ мають корені:

$$\sin x = 1\ ,\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in Z\ ,$$

$$\sin x = -1\ ,\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\ ,\ k \in Z\ .$$

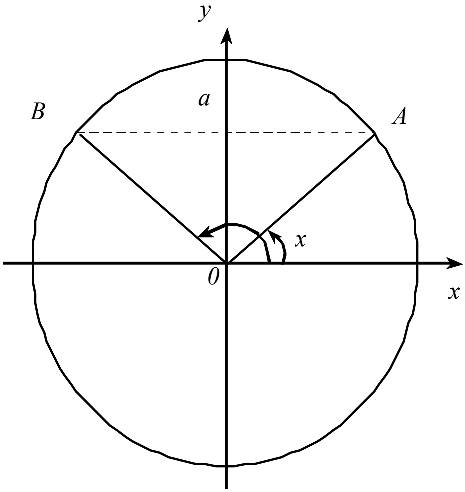


Рис. 2.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Розв'язування. По формулі (2) одержимо:

$$2x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi \ , \ 2x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + k\pi \ ,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \ , \ k \in Z \ .$$

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язування. По формулі (2) одержимо:

$$3x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi \ ,$$

$$3x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{3} + k\pi \ , \ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3} \ .$$

III. Рівняння $tgx = a$ **,** $ctg\, x = a$ **.** На проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ функція $y = tgx$ зростає, тому рівняння $\mathrm{tg}\, x = a$ при будь-якому значенні a має тільки один корінь $x = arctga$ на цьому проміжку.

Враховуючи, що функція $y = tgx$ періодична з періодом π, усі інші корені відрізняються від знайденого на $k\pi$ ($k \in Z$), тобто одержуємо таку формулу коренів рівняння $\operatorname{tg} x = a$:

$$x = \operatorname{arctg} a + k\pi, \ k \in Z. \qquad (3)$$

Ці корені (їм відповідають точки *A*, *B*) можна представити на рис. 3.

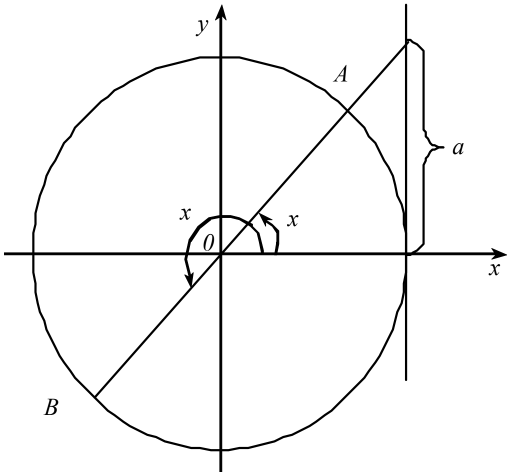


Рис. 3.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

Розв'язування. По формулі (3) знаходимо

$$2x = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + k\pi, \ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, \ k \in Z.$$

Розглянемо рівняння $ctgx = a$. На проміжку $(0;\pi)$ функція $y = ctgx$ спадає, тому рівняння $ctgx = a$ при будь-якому значенні *a* має тільки один корінь $x = arcctga$ на цьому проміжку.

Враховуючи, що функція $y = ctgx$ періодична з періодом π, усі інші корені відрізняються від знайденого на $k\pi$ ($k \in Z$), тобто одержуємо таку формулу коренів рівняння $ctgx = a$:

$$x = arcctga + k\pi, \ k \in Z.$$

2. Розв'язування лінійних тригонометричних рівнянь

Тригонометричне рівняння

$$a\cos x + b\sin x = c \qquad (4)$$

називається лінійним. Воно зводиться до найпростіших рівнянь.

Розділимо рівняння на вираз $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\ .$$

Введемо допоміжний кут γ такий, що

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\gamma\ ,\ \ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\gamma\ .$$

Рівняння набуде виду

$$\cos\gamma\cos x+\sin\gamma\sin x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

і може бути записане у вигляді рівняння

$$\cos(x-\gamma)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

яке має розв'язок

$$x=\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}+2k\pi\ ,\ k\in Z\ .$$

Рівняння (4) має розв'язок, якщо виконується нерівність

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\le 1\ \text{ або }\ c^2\le a^2+b^2\ .$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\cos x+\sin x=1$.

Розв'язування. Розділимо рівняння на $\sqrt{2}$ і отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

або

$$\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x-\frac{\pi}{4}=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+2k\pi\ ,\ x=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ,\ k\in Z\ .$$

3. Зведення тригонометричного рівняння до алгебраїчного

Якщо до рівняння, нерівності або тотожності змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Таким чином, тригонометричне рівняння при введені нової змінної перетвориться до виду $f(y)=0$, де y – тригонометричний вираз, наприклад $y=\cos x$, $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x=3\cos x$.

Розв'язування. Усі члени рівняння можна виразити через функцію $y=\cos x$. Приходимо до рівняння

$$2\left(1-y^2\right)=3y, \qquad y_1=\frac{1}{2},\ y_2=-2.$$

Повертаємося до заміни. Рівняння $\cos x=\dfrac{1}{2}$ має розв'язок

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z.$$

Вкажемо у загальному виді типові заміни:

$$f\left(\sin x,\cos^2 x\right)=0 \text{, заміна } y=\sin x;$$

$$f\left(\sin^2 x,\cos x\right)=0 \text{, заміна } y=\cos x;$$

$$f(\sin x,\cos x)=0,\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=y,\ \sin x=\frac{2y}{1+y^2},\ \cos x=\frac{1-y^2}{1+y^2}.$$

Означення. *Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь, то рівняння називається* ***однорідним***.

Рівняння виду

$$a\cos^{2n} x+b\cos^n x\sin^n x+c\sin^{2n} x=0 \tag{5}$$

є *однорідним*.

Розв'язується однорідне рівняння діленням на найвищий степінь однієї із змінних. Якщо $a\neq 0$, то після ділення рівняння на $\cos^{2n} x$, одержимо рівняння

$$a+by+cy^2=0,\ y=\frac{\sin^n x}{\cos^n x}=(\operatorname{tg} x)^n.$$

Зауваження. Дотримуючись цього орієнтира, доводиться ділити обидві частини рівняння на вираз із змінною. При цьому можна втратити корені (якщо коренями є ті числа, при яких дільник дорівнює нулю). Щоб уникнути цього, необхідно окремо розглянути випадок, коли вираз, на який ми збираємося ділити обидві частини рівняння, дорівнює нулю, і лише після цього виконувати ділення на вираз, що не дорівнює нулю.

Приклад 8. Розв’язати рівняння $\cos 2x + 2\sin 2x + 2 = 0$.

Розв’язування. Перепишемо рівняння у вигляді

$$\cos^2 x - \sin^2 x + 4\cos x \sin x + 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 0$$

або

$$3\cos^2 x + 4\cos x \sin x + \sin^2 x = 0 \ .$$

Це рівняння однорідне і зводиться, діленням на $\cos^2 x$, до рівняння

$$3 + 4y + y^2 = 0, \ y = \operatorname{tg} x, \ y_1 = -1, \ y_2 = -3.$$

Рівняння має дві множини розв’язків:

$\operatorname{tg} x = -1$, $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in Z$;

$\operatorname{tg} x = -3$, $x_2 = -arctg3 + k\pi$, $k \in Z$.

4. Розв’язування тригонометричних рівнянь за допомогою розкладання на множники

Якщо рівняння вдасться розкласти на множники

$$f_1(x) f_2(x) = 0,$$

то можна окремо розв’язувати рівняння $f_1(x) = 0$, $f_2(x) = 0$.

Приклад 9. Розв’язати рівняння $\sin 4x - 2\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$.

Розв’язування. Розкладемо рівняння на множники

$$2\sin 2x(\cos 2x - \sin x \cdot \sin 3x) = 0 \ .$$

Оскільки $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$, то рівняння приймає вид

$$2\sin 2x \cdot \cos 3x \cos x = 0$$

і зводиться до двох рівнянь:

$\sin 2x = 0$, $2x = k\pi$, $x_1 = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$;

$\cos 3x = 0$, $3x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in Z$.

Рівняння $\cos x = 0$ входить у рівняння $\sin 2x = 0$ ($2\sin x \cdot \cos x = 0$), і корені рівняння $\cos x = 0$ входить в x_1.

5. Системи тригонометричних рівнянь

Системи тригонометричних рівнянь розв'язуються за допомогою тих самих методів, що й алгебраїчні системи. Зокрема, це виключення невідомих і заміна змінних. Виключити невідомі можна за допомогою одного з двох прийомів: з одного рівняння виразити якесь невідоме (або функцію від нього) і підставити його в інші або перетворити дані рівняння і потім скласти з них комбінації, у яких число невідомих зменшується.

Приклад 10. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x \cos y = -\dfrac{1}{2}, \\ \cos x \sin y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язування. Додавши і віднявши почленно рівняння, одержимо систему:

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \cos x \sin y = 0, \\ \sin x \cos y - \cos x \sin y = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(x-y) = -1. \end{cases}$$

Знаходимо розв'язки рівнянь

$$\begin{cases} x + y = k\pi, & k \in Z, \\ x - y = -\dfrac{\pi}{2} + n\pi, & n \in Z. \end{cases}$$

Додавши і віднявши почленно рівняння знаходимо невідомі x, y:

$$x = -\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} + \frac{n\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} - \frac{n\pi}{2}, \quad k, n \in Z .$$

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Розв'язування. Позначимо $\sin x = t$, $\cos y = z$ і отримаємо

$$\begin{cases} t + z = 0, \\ t^2 + z^2 = \dfrac{1}{2}, \quad t = \pm\dfrac{1}{2}, \quad z = \mp\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Повертаємося до заміни і знаходимо розв'язки:

1) $\begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{2}, & x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ \cos y = -\dfrac{1}{2}, & y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k, n \in Z; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sin x = -\dfrac{1}{2}, & x = (-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n, \\ \cos y = \dfrac{1}{2}, & y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k, n \in Z. \end{cases}$

Зауваження. До запису відповіді ввійшли два параметри *n* і *k*, що незалежно один від одного «пробігають» множину цілих чисел. Якщо спробувати при розв'язуванні заданої системи скористатися лише одним параметром, наприклад, n, то це спричинить втрату розв'язків. Отже, у кожному випадку, коли система тригонометричних рівнянь зводиться до системи, що складається з елементарних тригонометричних рівнянь (тобто з рівнянь виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$, $\mathrm{ctg}\, x = a$), при розв'язуванні кожного з цих рівнянь необхідно використовувати свій цілочисельний параметр.

§ 9. ПОКАЗНИКОВА І ЛОГАРИФМІЧНА ФУНКЦІЇ

1. Показова функція

Означення. ***Показниковою функцією*** *називається функція виду* $y = a^x$*, де* $a > 0$, $a \neq 1$.

Зазначимо, що функція виду $y = a^x$ існує й при $a = 1$. Тоді $y = a^x = 1^x$, тобто $y = 1$ при всіх значеннях $x \in R$. Але в цьому випадку функція $y = 1^x$ не називається показниковою (графік функції $y = 1^x$ – пряма).

Властивості показникової функції

1. Оскільки при $a > 0$ вираз a^x означений при всіх дійсних значеннях *x*, то *областю визначення показникової функції* $y = a^x$ є всі дійсні числа.

Областю значень функції $y = a^x$ є множина всіх додатних чисел, тобто функція $y = a^x$ набуває тільки додатних значень, причому будь-яке додатне число є значенням функції, тобто $E(y) = (0;+\infty)$.

Це означає, що графік показникової функції $y = a^x$ завжди розміщений вище осі *Ox* і будь-яка пряма, що паралельна осі *Ox* і знаходиться вище неї, перетинає цей графік.

2. При $a > 1$ показова функція $y = a^x$ *зростає* при всіх значеннях *x*, при $0 < a < 1$ показова функція *спадає* при всіх значеннях *x* (рис. 1).

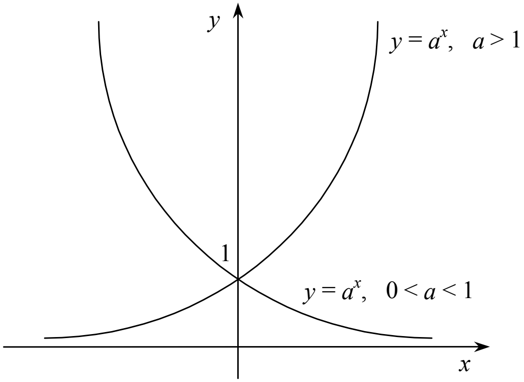


Рис. 1

3. Функція $y = a^x$ не є *ні парною, ні непарною*, оскільки $f(-x) = a^{-x} = \dfrac{1}{a^x} \neq f(x) = a^x$

4. Графік функції $y = a^x$ перетинає вісь *Oy* у точці *y* = 1. Дійсно, на осі *Oy* значення *x* = 0, тоді $y = a^0 = 1$.

5. Графік показникової функції $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) не перетинає вісь *Ox*, оскільки на осі *Ox y* = 0, але значення *y* = 0 не входить до області значень показникової функції $y = a^x$ ($y = a^x = 0$ тільки при *a* = 0, але за означенням $a > 0$).

6. Функція $y = a^x$ *не має ні найбільшого, ні найменшого значень*, оскільки її область значень – проміжок $(0;+\infty)$, який не містить ні найменшого, ні найбільшого числа.

2. Розв’язання показових рівнянь

Означення. ***Показниковими називають рівняння****, у яких змінна входить у показник степеня (а основа цього степеня не містить змінної).*

Розглянемо **найпростіше показникове рівняння** $a^x = b$, де $a > 0$ і $a \neq 1$. Оскільки при цих значеннях *a* функція строго монотонна (зростає при *a* > 1 і спадає при 0 < *a* < 1), то кожного свого значення вона набуває тільки при одному значенні аргументу. Це означає, що **рівняння** $a^x = b$ **при *b* > 0 має єдиний корінь.** Щоб його знайти, досить подати *b* у вигляді $b = a^c$.

Очевидно, що $x = c$ є коренем рівняння а $a^x = a^c$.

Наприклад, щоб розв’язати рівняння $5^x = 25$, досить подати це рівняння у вигляді $5^x = 5^2$ і записати його єдиний корінь *x* = 2.

Якщо $b \leq 0$**, то рівняння** $a^x = b$ **(при *a* > 0) коренів не має**, оскільки a^x завжди більше нуля.

Наприклад, рівняння $5^x = -5$ не має коренів.

Узагальнюючи наведені вище міркування стосовно розв’язування найпростіших показникових рівнянь, відзначимо, що **при** $a > 0$ **і** $a \neq 1$ **рівняння**

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

рівносильне рівнянню

$$f(x) = g(x).$$

У найпростіших випадках при розв'язуванні показникових рівнянь намагаються за допомогою основних формул дій над степенями звести (якщо це можливо) задане рівняння до виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

Для розв'язування більш складних показникових рівнянь найчастіше використовують **заміну змінних** або **властивості відповідних функцій**.

Зауважимо, що всі рівносильні перетворення рівняння завжди виконуються на його області допустимих значень (тобто на спільній області визначення для всіх функцій, які входять до запису цього рівняння). Але в показникових рівняннях найчастіше областю допустимих значень (ОДЗ) є множина всіх дійсних чисел. У цих випадках, як правило, ОДЗ явно не знаходять і не записують до розв'язання рівняння. Але якщо в процесі розв'язування показникових рівнянь рівносильні перетворення виконуються не на всій множині дійсних чисел, то в цьому випадку доводиться згадувати про ОДЗ.

Метод заміни змінних при розв'язуванні показникових рівнянь. Щоб зорієнтуватися, чи можна ввести заміну змінних у даному показниковому рівнянні, часто буває корисно на початку розв'язування позбутися числових доданків у показниках степенів, використовуючи властивості степеня. Наприклад, рівнянню

$$4^{x+1} - 3 \cdot 2^x - 10 = 0$$

можна записати рівносильне

$$4^x \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0 \text{ або } 2^{2x} \cdot 4 - 3 \cdot 2^x - 10 = 0.$$

Нагадаємо: якщо до рівняння змінна входить в одному і тому самому вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною). Звертаємо увагу на те, що $2^{2x} = (2^x)^2$. Тому в останньому рівнянні зручно ввести заміну $2^x = t$ і одержати квадратне рівняння

$$4t^2 - 3 \cdot t - 10 = 0.$$

Розв'язування однорідних показникових рівнянь. Якщо всі члени рівняння, у лівій і правій частинах якого стоять многочлени від двох змінних (або від двох функцій однієї змінної), мають однаковий сумарний степінь, то рівняння **називається однорідним**.

Розв'язується однорідне рівняння діленням обох його частин на найвищий степінь однієї із змінних.

Наприклад, рівняння $A\cdot a^x\cdot a^x+B\cdot a^x\cdot b^x+Cb^x\cdot b^x=0$, можна переписати у вигляді $A\dfrac{a^xa^x}{b^xb^x}+B\dfrac{a^x}{b^x}+C=0$.

Вважаючи $\dfrac{a^x}{b^x}=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=t$, отримаємо рівняння $At^2+Bt+C=0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $4\cdot 3^{2x}-9\cdot 2^{2x}=5\cdot 6^x$.

Розв'язування. Перепишемо рівняння у вигляді

$$4\cdot 3^x\cdot 3^x-9\cdot 2^x\cdot 2^x=5\cdot 3^x\cdot 2^x.$$

Поділимо рівняння на 2^{2x} і отримаємо $4\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}-9=5\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2$.

Позначимо $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x$, тоді $4t^2-9=5t$; $t_1=\dfrac{9}{4}$, $t_2=-1$.

Отримали два рівняння: 1) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=\dfrac{9}{4};\quad x_1=2;$

2) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^x=-1,\quad x\in\varnothing$. Відповідь. 2.

3. Розв'язання показових нерівностей

При розв'язуванні показникових нерівностей вигляду

$$a^{f(x)}>a^{g(x)}$$

потрібно врахувати наступне:

1) якщо $a>1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)>g(x)$.

2) якщо $0<a<1$, то $a^{f(x)}>a^{g(x)}\Leftrightarrow f(x)<g(x)$.

Приклад 2. Розв'язати показникову нерівність $3^{x+1}>\left(\dfrac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{x}}$.

Розв'язування. Перейдемо до основи 3

$$3^{x+1}>3^{\frac{2}{x}},\quad x+1>\frac{2}{x},\quad \frac{x^2+x-2}{x}>0,\quad \frac{(x+2)(x-1)}{x}>0.$$

Останню нерівність розв'яжемо методом інтервалів і отримаємо розв'язок $x\in(-2;\,0)\cup(1;\,+\infty)$.

Приклад 3. Розв'язати показникову нерівність

$$5\cdot 4^x+3\cdot 10^x<2\cdot 5^{2x}.$$

Розв'язування. Запишемо нерівність у вигляді

$$5\cdot 2^{2x}+3\cdot 2^{x}\cdot 5^{x}<2\cdot 5^{2x}.$$

Поділимо нерівність на 2^{2x} і отримаємо

$$5+3\cdot\frac{5^x}{2^x}<2\cdot\left(\frac{5^x}{2^x}\right)^2.$$

Позначимо $\frac{5^x}{2^x}=\left(\frac{5}{2}\right)^x=t$, отримаємо нерівність $2t^2-3t-5>0$,

$t\in(-\infty;\ -1)\cup\left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)$. Перепишемо:

1) $t<-1,\ \left(\frac{5}{2}\right)^x<-1,\quad x\in\varnothing$.

2) $t<\frac{5}{2},\ \left(\frac{5}{2}\right)^x>\frac{5}{2},\quad x>1$. Відповідь. $x\in(1;\ +\infty)$.

4. Логарифмічна функція

Означення. ***Логарифмічною функцією*** *називається функція виду* $y=\log_a x$, *де* $a>0,\ a\neq 1,\ x>0$.

Властивості логарифмічної функції

1. *Областю визначення* функції $y=\log_a x$ є множина всіх додатних чисел ($x>0$);

2. *Областю значень* функції $y=\log_a x$ є множина R всіх дійсних чисел, тому вона не має ні найбільшого, ні найменшого значень.

3. Функція $y=\log_a x$ не може бути *ні парною, ні непарною*, оскільки її область визначення не симетрична відносно точки 0.

4. Графік функції $y=\log_a x$ не *перетинає вісь Оу*, оскільки на осі *Оу* $x=0$, а це значення не входить до області визначення функції $y=\log_a x$. Графік функції $y=\log_a x$ *перетинає вісь Ох* у точці $x=1$, оскільки $\log_a 1=0$.

5. При $a>1$ логарифмічна функція зростає на всій області визначення, а при $0<a<1$ – спадає на всій області визначення (рис. 2).

6. *Проміжки знакосталості.* Оскільки графік функції $y=\log_a x$ перетинає вісь *Ох* у точці $x=1$, то, враховуючи зростання функції при $a>1$ та спадання при $0<a<1$, маємо:

Значення функції	Значення аргументу	
	при $a>1$	при $0<a<1$
$y>0$	$x\in(1;+\infty)$	$x\in(0;1)$
$y<0$	$x\in(0;1)$	$x\in(1;+\infty)$

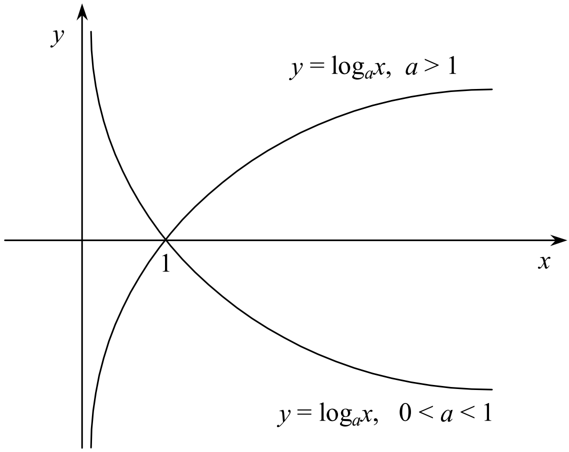


Рис. 2

Логарифмічна функція є оберненою до показової функції $y = a^x$.

Приклад 4. Знайти область визначення функції $y=\log_{0,5}(x^2-2x)$.

Розв'язування. Область визначення задається нерівністю $x^2-2x>0$. Розв'язуючи цю квадратну нерівність одержуємо $x<0$ або $x>2$.

Тобто $D(y)=(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$.

5. Перетворення логарифмічних виразів

Означення. ***Логарифм числа b за основою a*** *називається степінь, до якого потрібно піднести основу a, щоб отримати число b, тобто*

$$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b\,,\quad a>0,\ a\neq 1,\ b>0\,.$$

З означення можна записати основну логарифмічну тотожність

$$a^{\log_a b}=b\,.$$

Приведемо деякі властивості логарифмів:

1. $\log_a 1=0$.
2. $\log_a a=1$.

3. $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$. 4. $\log_a \frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$.

5. $\log_a b^n = n\log_a b$. 6. $\log_{a^m} b=\frac{1}{m}\log_a b$

7. $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$. 8. $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$.

7. Формула переходу до нової основи $c>0,\ \ c\neq 1$ $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$.

Приклад 5. Обчислити: а) $\log_{\sqrt{5}} 625$; б) $\log_8 \sqrt[7]{49}$;

в) $\log_5 150-\log_5 3+\log_5 \frac{1}{2}$; г) $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 2\right)$; д) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{8}} 27}$;

е) $\log_9 \log_4\left(\sqrt[3]{4}\right)$; є) $3^{\log_3^2 5}-5^{\log_9 25}$; ж) $\log_{25}^2 81\cdot\log_3^2 5$.

Розв'язування. а) $\log_{\sqrt{5}} 625=\log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^4=\frac{4}{\frac{1}{2}}\log_5 5=8$.

б) $\log_8 \sqrt[7]{49}=(49)^{\frac{1}{\log_8 7}}=(49)^{\log_8 7}=49^{\log_{49} 64}=64$.

в) $\log_5 150-\log_5 3+\log_5 \frac{1}{2}=\log_5 \frac{150\cdot 1}{3\cdot 2}=\log_5 25=2$.

г) $\log_2\left(\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 2\right)=\log_2\left(\log_{\sqrt{2}} 2\cdot\log_{\sqrt{3}} 9\right)=\log_2(2\cdot 4)=3$.

д) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{8}} 27}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot\log_{\frac{1}{8}} 3}=9$.

е) $\log_9 \log_4\left(\sqrt[3]{4}\right)=\log_9 \log_4 4^{\frac{1}{3}}=\log_9 \frac{1}{3}=\log_{3^2}\cdot 3^{-1}=-\frac{1}{2}$.

є) $3^{\log_3^2 5}-5^{\log_9 25}=\left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3 5}-5^{\log_3 5}=5^{\log_3 5}-5^{\log_3 5}=0$.

ж) $\log_{25}^2 81\cdot\log_3^2 5=\left(\log_{25} 5\cdot\log_3 81\right)^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 4\right)^2=4$.

Приклад 6. 10. Знайти $\log_9 20$, якщо $\lg 2=a,\ \ \lg 3=b$.

Розв'язування. $\log_9 20=\frac{\lg 20}{\lg 9}=\frac{\lg 2+\lg 10}{2\lg 3}=\frac{a+1}{2b}$.

6. Розв'язування логарифмічних рівнянь

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних рівнянь. Найпростішим логарифмічним рівнянням вважають рівняння $\log_a x = c$ ($a > 0$ і $a \neq 1$).

Логарифмічна функція зростає (або спадає) на всій своїй області визначення, тобто при $x > 0$, і тому кожного свого значення набуває тільки при одному значенні аргументу. Враховуючи, що логарифмічна функція набуває всіх дійсних значень, рівняння

$$\log_a x = c \tag{1}$$

завжди має єдиний корінь, який можна записати, скориставшись означенням логарифма: $x = a^c$.

Якщо розглянути рівняння

$$\log_a f(x) = c \tag{2}$$

і виконати заміну змінної: $f(x) = t$, то одержимо найпростіше логарифмічне рівняння $\log_a t = c$, яке має єдиний корінь $t = a^c$. Виконуючи обернену заміну, одержуємо, що розв'язки рівняння (2) збігаються з розв'язками рівняння

$$f(x) = a^c. \tag{3}$$

Отже, рівняння (2) і (3) – рівносильні. Таким чином, ми обґрунтували, що для рівносильного перетворення найпростішого логарифмічного рівняння (1) або рівняння (2) (яке ми теж будемо відносити до найпростіших за умови, що основа a – число) *досить використати означення логарифма.*

Наприклад, рівняння $\log_3(x-1) = 2$ рівносильне рівнянню $x - 1 = 3^2$, корінь якого $x = 10$ і є коренем заданого рівняння.

2. Використання рівнянь-наслідків при розв'язуванні логарифмічних рівнянь. При розв'язуванні рівняння головне – не загубити його корені, і тому важливо стежити за тим, щоб кожен корінь першого рівняння залишався коренем наступного – у цьому випадку одержуємо рівняння&наслідки. Нагадаємо, що кожен корінь заданого рівняння перетворює його на правильну числову рівність. Використовуючи це означення, можна обґрунтувати такий орієнтир: якщо з припущення про правильність першої рівності випливає правильність кожної наступної, ми одержуємо рівняння!наслідки (оскільки кожен корінь першого рівняння буде і коренем наступного рівняння). Нагадаємо, що хоча при використанні наслідків не відбувається втрати коренів початкового рівняння, але можлива поява сторонніх коренів. Тому перевірка одержаних коренів підстановкою в початкове рівняння є складовою частиною розв'язування при використанні рівнянь-наслідків.

3. Рівносильні перетворення логарифмічних рівнянь. Одним із часто використовуваних способів рівносильних перетворень рівнянь є заміна змінної.

Нагадаємо загальний орієнтир, якого ми дотримувалися при розв'язуванні рівнянь з інших розділів: якщо до рівняння (нерівності або тотожності) змінна входить в одному і тому ж вигляді, то зручно відповідний вираз із змінною позначити однією буквою (новою змінною).

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\log_{0,5}^2 x + 6 = 5\log_{0,5} x$.

Розв'язування. Зробимо заміну $\log_5 x = t$, тоді $t^2 - 5t + 6 = 0$;

$$t_1 = 2;\ t_2 = 3;\quad \log_5 x = 2,\ \ x_1 = 25,\ \ \log_5 x = 3,\ \ x_2 = 125.$$

Зважаючи на те, що заміна змінної (разом з оберненою заміною) є рівносильним перетворенням рівняння на будь-якій множині, для виконання заміни не обов'язково знаходити ОДЗ заданого рівняння. А після виконання оберненої заміни ми одержали найпростіші логарифмічні рівняння, для яких (як було показано вище) ОДЗ враховується автоматично, і її теж можна не записувати. Отже, у наведеному розв'язанні ОДЗ заданого рівняння врахована автоматично, і тому в явному вигляді ОДЗ можна не записувати до розв'язання.

Розглянемо також **рівносильні перетворення рівняння виду**

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \quad (a > 0 \text{ і } a \neq 1). \tag{4}$$

Враховуючи ОДЗ, одержуємо, що рівняння (4) рівносильне системі

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

4. Графічний спосіб розв'язання. Рівняння записується у вигляді $f_1(x) = f_2(x)$. Будуються графіки функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, і шукаються точки їх перетинання, які визначають розв'язок рівняння.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\log_2 x = 3 - x$.

Розв'язування. Розв'яжемо рівняння графічно. Графіки функцій $y = \log_2 x$, $y = 3 - x$, перетинаються в точці $x = 2,\ y = 1$. Розв'язок $x = 2$.

7. Розв'язування логарифмічних нерівностей

1. Розв'язування найпростіших логарифмічних нерівностей. Найпростішими логарифмічними нерівностями вважають нерівності виду

$$\log_a f(x) > \log_a g(x), \quad a > 0, a \neq 1. \qquad (5)$$

Для розв'язування такої нерівності можна використати рівносильні перетворення. Для цього необхідно врахувати її ОДЗ: $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ і розглянути два випадки: основа логарифма більша за 1 чи основа менша за 1 (але більша за 0).

I. При $a > 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

II. При $0 < a < 1$ $\quad \log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\lg(-x) < -1$.

Розв'язування. Запишемо нерівність у вигляді (5)

$$\lg(-x) < \lg 10^{-1}$$

і знайдемо розв'язок $\begin{cases} -x < 0{,}1, \\ -x > 0. \end{cases}$ Отримаємо $-0{,}1 < x < 0$.

2. Розв'язування більш складних логарифмічних нерівностей виконується або за допомогою рівносильних перетворень заданої нерівності (і зведення її до відомого виду нерівностей), або за допомогою методу інтервалів.

Схема рівносильних перетворень логарифмічних нерівностей повністю аналогічна схемі рівносильних перетворень логарифмічних рівнянь:

1) враховуємо ОДЗ заданої нерівності;

2) стежимо за тим, щоб на ОДЗ кожне перетворення можна було виконати як у прямому, так і у зворотному напрямках із збереженням правильної нерівності.

У цьому випадку на ОДЗ кожен розв'язок заданої нерівності буде і розв'язком другої і, навпаки, кожен розв'язок другої нерівності буде розв'язком першої, тобто ці нерівності будуть рівносильними (на ОДЗ).

Найбільш складними являються логарифмічні нерівності, коли основи логарифмів залежать від x:

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x), \qquad (6)$$

Тоді нерівність (6) можна звести до двох систем нерівностей:

$$1.\ \begin{cases} h(x) > 1, \\ f(x) > g(x) > 0, \end{cases} \qquad 2.\ \begin{cases} 0 < h(x) < 1, \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases}$$

Загальний розв'язок яких утворить розв'язок нерівності (6).

Приклад 10. Розв'язати нерівність $\log_x(3-2x) < 1$.

Розв'язування. Оскільки $1 = \log_x x$, то дана нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей:

$$1.\ \begin{cases} x > 1, \\ 0 < 3-2x < x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ 3-2x > 0, \\ x > 3-2x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x < \dfrac{3}{2}, \\ x > 1, \end{cases} \Rightarrow 1 < x < \frac{3}{2};$$

$$2.\ \begin{cases} 0 < x < 1, \\ 0 < x < 3-2x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x > 0, \\ 3-2x > x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 1, \\ x < 1, \end{cases} \Rightarrow 0 < x < 1.$$

Остаточна відповідь $x \in (0;1) \cup (1;1{,}5)$.

8. Системи показових і логарифмічних рівнянь

Для розв'язання системи рівнянь намагаються зменшити число рівнянь, крім невідомих.

Приклад 11. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77, \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 7. \end{cases}$$

Розв'язування. Позначимо $3^{\frac{x}{2}} = t,\ 2^y = z$. Отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} t^2 - z^2 = 77, \\ t - z = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (t-z)(t+z) = 77, \\ t - z = 7, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + z = 11, \\ t - z = 7, \end{cases} \Rightarrow t = 9,\ z = 2.$$

Повернемося до позначень: $3^{\frac{x}{2}} = 9,\ x = 4;\quad 2^y = 2;\ y = 1$.

Приклад 12. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5^x = 4y, \\ 4^x = 5y. \end{cases}$$

Розв'язування. Розділимо перше рівняння на друге

$$\frac{5^x}{4^x} = \frac{4y}{5y}, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{4}{5}, \quad x = -1, \quad y = \frac{5^x}{4} = \frac{1}{20}.$$

Приклад 13. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^{x+y} = 128, \\ 5^{3x-2y-3} = 1. \end{cases}$$

Розв'язування. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} 4^{2(x+y)} = 2^7, \\ 5^{3x-2y-3} = 5^0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = \dfrac{7}{2}, \\ 3x - 2y = 3, \end{cases} \Rightarrow \; x = 2, \quad y = \frac{3}{2}.$$

§ 10. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ІМОВІРНОСТЕЙ ТА СТАТИСТИКИ

1. Елементи комбінаторики

Групи, що утворені з яких-небудь елементів, називаються **сполуками**.

Задачі, в яких здійснюється підрахунок можливих різних сполук, складених з кінцевого числа елементів за деяким правилом, називаються **комбінаторними**. Розділ математики, який займається їх розв'язання називається **комбінаторикою**.

Розрізняють три основні види сполук: **розміщення**, **перестановки** і **комбінації**. Якщо всі елементи сполуки різні, то одержуємо сполуки без повторень, а якщо елементи можуть повторюватися, то одержуємо сполуки з повтореннями. Надалі будемо розглядати лише сполуки без повторень.

Означення. ***Розміщеннями з n елементів по m*** *називаються такі сполуки, які відрізняються одна від одної або елементами (хоча б одним), або порядком їх розташування.*

Число розміщень з n елементів по m позначається символом A_n^m і обчислюється за формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]. \qquad (1)$$

Означення. ***Перестановками з n елементів*** *називаються такі сполуки з усіх n елементів, які відрізняються одна від одної порядком розташування елементів.*

Число перестановок з n елементів позначається символом P_n.

Перестановки являють собою окремий випадок розміщення з n елементів в кожному, тобто

$$P_n = A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots\ 3.2.1$$

або

$$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)n. \qquad (2)$$

Серед усіх перестановок з n елементів рівне добутку послідовних чисел від 1 до n включно. Добуток $1\cdot 2\cdot 3\ \ldots\ (n-1)n$ позначають символом $n!$ (читається «n-факторіал»), причому вважають $0!=1$, причому рівність (2) можна переписати у вигляді

$$P_n = n!. \qquad (3)$$

Використовуючи формулу (3), формулу (1) можна надати вигляду

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При розв'язанні задач часто використовується рівність

$$A_n^{m+1} = (n-m)A_n^m.$$

Означення. ***Комбінаціями з*** n ***елементів по*** m *називають сполуки, які відрізняються одна від одної хоча б одним членом.*

Кількість комбінацій з n елементів по m позначається C_n^m. Вона знаходиться

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m},$$

Можна записати також у вигляді

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)} \qquad (4)$$

або

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots[n-(m-1)]}{m!}.$$

Крім того, при розв'язанні задач використовуються наступні формули, що виражають основні властивості комбінацій:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \left(0 \le m \le n\right)$$

(за визначенням вважають $C_n^n = 1$ і $C_n^0 = 1$);

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}.$$

В основі розв'язування багатьох комбінаторних задач лежать два основних правила – правило суми і правило добутку.

Правило суми. *Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B – n способами, то A або B можна вибрати (m + n) способами.*

Наприклад, якщо на тарілці лежить 5 груш і 4 яблука, то вибрати один фрукт (тобто грушу або яблуко) можна 9 способами (5 + 4 = 9).

Правило добутку. *Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після цього елемент B – n способами, то A і B можна вибрати* ($m \cdot n$) *способами.*

Наприклад, якщо в кіоску продають ручки 5 видів і зошити 6 видів, то вибрати набір з ручки і зошита (тобто пару – ручка і зошит) можна $5 \cdot 6 = 30$ способами (оскільки до кожної з 5 ручок можна взяти будь-який із 6 зошитів).

Повторюючи наведені міркування декілька разів, одержуємо, що правила суми і добутку можна застосовувати при виборі довільної скінченної кількості елементів.

Отже, якщо доводиться вибирати або перший елемент, або другий, або третій і т. д. елемент, кількості способів вибору кожного елементу додають, а коли доводиться вибирати набір, у який входить і перший, і другий, і третій, і т. д. елементи, кількості способів вибору кожного елементу перемножують.

Приклад 1. Знайти число розміщень з 10 елементів по 4.

Розв'язування. Згідно з формулою (1), отримуємо $A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $A_n^5 = 30 A_{n-2}^4$.

Розв'язування. Використовуючи формулу (1), перепишемо рівняння у вигляді

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 30(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

Враховуючи, що $n \geq 6$, розділимо обидві його частини на $(n-2)(n-3)(n-4)$, тоді маємо

$$\big(n(n-1) = 30(n-5)\big) \Leftrightarrow \left(n^2 - 31n + 150 = 0\right) \Leftrightarrow \left(n_1 = 6;\ n_2 = 25\right).$$

Приклад 3. Скласти всі можливі перестановки з елементів а) 3; б) 5, 6 в) $a,\ b,\ c$.

Розв'язування. а) (3); $P_1 = 1$; б) $(5,\ 6)$; $(6,\ 5)$; $P_2 = 1 \cdot 2 = 2$;

в) $(a,\ b,\ c)$; (a, c, b); $(b, c,\ a)$; $(c,\ a,\ b)$; $(c,\ a,\ b)$; $(c,\ b,\ a)$; $P_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Приклад 4. Обчислити значення виразів: а) $5!+6!$; б) $\dfrac{52!}{50!}$.

Розв'язування. а) $5!+6! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 + 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 + 720 = 840$;

$$\text{б) } \frac{52!}{50!} = \frac{50! \cdot 51 \cdot 52}{50!} = 51 \cdot 52 = 2652.$$

Приклад 5. Обчислити $C_6^4 + C_5^0$.

Розв'язування. Згідно з формулою (4), отримаємо:

$$C_6^4 + C_5^0 = \frac{6!}{4!(6-4)!} + 1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} + 1 = 15 + 1 = 16.$$

2. Випадкові події, імовірність подій

Вивчення кожного явища в порядку спостереження або здійснення досліду пов'язане з існування деякого комплексу умов (експериментів). Будь-який результат або наслідок експерименту називається **подією**.

Якщо подія при заданих умовах може відбутися або не відбутися, то вона називається **випадковою**. Випадкові події надалі будемо називати просто подіями і позначати великими латинськими літерами *A*, *B*,

C, ….. В тому випадку, коли подія має обов'язково відбутися, її називають **достовірною**, а в тому випадку, коли вона свідомо не може відбутися, – **неможливою**.

Події називаються **несумісними**, якщо кожного разу можлива поява тільки однієї з них. Події називаються **сумісними**, якщо в даних умовах поява однієї з цих подій не виключає появи другої при тому ж експерименті.

Елементарними називають події, які можуть відбутися при випробуванні. Події одного випробування називаються **рівноможливими**, якщо є підстави вважати, що жодна з них не є більш можливою, ніж інші.

Імовірність події розглядається як міра об'єктивної можливості появи випадкової події.

Класичне означення імовірності. ***Імовірністю події*** *A називається відношення числа наслідків елементарних рівноможливих подій m, що сприяють здійсненню даної події A, до числа всіх елементарних рівноможливих подій n у даному експерименті, тобто*

$$P(A)=\frac{m}{n}. \tag{5}$$

Імовірність будь-якої події не може бути меншою нуля і більше одиниці, тобто $0 \le P(A) \le 1$. Неможливій події відповідає імовірність $P(A)=0$, а достовірній – імовірність $P(A)=1$.

Разом із імовірністю до основних понять теорії імовірностей належить відносна частота.

Означення. ***Відносною частотою*** *події називається відношення числа експериментів, в яких подія відбулася M, до загального числа фактичного проведення експериментів N, тобто*

$$W(A)=\frac{M}{N}.$$

Співставлення означень імовірності і відносної частоти дозволяє зробити висновок: імовірність обчислюють до експерименту, а відносну частоту – після експерименту.

Наведене класичне означення імовірності не можна застосувати до випадкових експериментів з нескінченною кількістю наслідків. У цьому випадку імовірність події $P(A)$ не завжди можна задати за допомогою елементарних імовірностей.

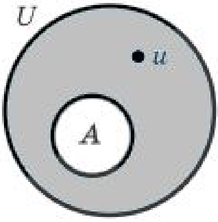


Рис. 1

Розглянемо випадок задання імовірностей $P(A)$ за допомогою так званих геометричних імовірностей. Нехай *U* – деяка фігура на площині, $S(U)$ – її площа, *A* – частина фігури *U* з площею $S(A)$ (рис. 1). Елементарними подіями *u* будемо вважати точки фігури *U*, тобто будемо вважати, що ми випадково вибираємо якусь точку *u* з фігури *U* (або кидаємо якусь точку на фігуру *U*). Припускаємо, що імовірність попадання точки в частину фігури *U* пропорційна тільки площі цієї частини і не залежить від її розміщення відносно фігури *U*. Тоді імовірність попадання точки *u* у фігуру *A* означається як відношення площ

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}.$$

Тоді можна сформулювати геометричне означення імовірності.

Означення. ***Геометричною імовірністю події*** *A називається відношення площі фігури, сприятливої для події A, до площі всієї заданої фігури.*

Розглянемо **найпростіші операції над подіями.**

1. Подія $\overline{A}$ називається **протилежною** до події A, якщо вона відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A.

Наприклад, якщо подія A полягає в тому, що випала парна кількість очок при підкиданні грального кубика, то подія $\overline{A}$ означає, що випала непарна кількість очок при підкиданні грального кубика.

Для протилежних подій виконується рівність

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

2. **Сумою (або об'єднанням) подій *A* і *B*** називається подія $A + B$ (інше позначення $A \cup B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія *A* або подія *B*.

Для несумісних подій А і В виконується рівність

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Тобто імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі імовірностей цих подій.

Наприклад, нехай при підкиданні грального кубика події A і B означають: A – випаде непарна кількість очок, B – випаде число очок, яке кратне 5. Тоді подія $A+B$ означає, що випаде або непарна кількість очок, або число очок, яке ділиться на 5, тобто випаде 1, 3 або 5 очок.

3. **Добутком (або перерізом) подій *A* і *B*** називається подія $A \cdot B$ (інше позначення $A \cap B$), яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події A і B.

У наведеному вище прикладі подія $A \cdot B$ означає, що випаде і непарна кількість очок, і число очок, яке ділиться на 5, тобто випаде 5 очок.

Приклад 6. В лотереї з 1000 білетів є 200 виграшних. Виймають випадково один білет. Чому дорівнює імовірність того, що цей білет буде виграшним?

Розв'язування. Загальне число різних наслідків є $n=1000$. Число випадків, що сприяють отриманню виграшу, складає $m = 200$. Згідно з формулою (5), отримаємо $P(A) = 200/1000 = 0{,}2$.

Приклад 7. З урни, в якій знаходяться 5 білих і 3 чорних кулі, виймають один шар. Знайти імовірність того, що куля виявиться чорною.

Розв'язування. Позначимо подію, що полягає в появі чорної кулі, через A. Загальне число випадків $n = 5+3 = 8$. Число випадків m, що сприяє появі події A, дорівнює 3. За формулою (5) отримаємо $P(A) = m/n = 3/8 = 0{,}375$.

Приклад 8. З урни, в якій знаходяться 12 білих і 8 чорних куль, виймають випадково дві кулі. Яка імовірність того, що обидві кулі виявляться чорними?

Розв'язування. Позначимо подію, що складається з появи двох чорних куль, через A. Загальне число можливих випадків n дорівнює число комбінацій з 20 елементів $(12+8)$ по два:

$$n = C_{20}^{3} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

Число випадків m, сприяє події A, складає

$$m = C_{8}^{2} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

За формулою (5) знаходимо імовірність появи двох чорних куль:

$$P(A) = m/n = 28/190 = 0{,}147.$$

Приклад 9. В партії з 18 деталей знаходяться 4 бракованих. Випадково обирають 5 деталей. Знайти імовірність того, що з цих 5 деталей дві виявляться бракованими.

Число всіх рівноможливих незалежних наслідків n дорівнює число комбінацій з 18 по 5, тобто

$$C_{18}^{5}=\frac{18\cdot 17\cdot 16\cdot 15\cdot 14}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8568.$$

Підрахуємо число наслідків m, що сприяють події A. Серед 5 взятих випадково деталей май бути 3 якісних і 2 бракованих. Число способів вибірки двох бракованих деталей з 4 наявних бракованих дорівнює числу комбінацій з 4 по 2:

$$C_{14}^{3}=\frac{14\cdot 13\cdot 12}{1\cdot 2\cdot 3}=364.$$

Будь-яка група якісних деталей може комбінуватися з будь-якою групою бракованих деталей, тому спільне число комбінацій m являє

$$m=C_4^2\cdot C_{14}^3=6\cdot 364=2184.$$

Шукана імовірність події A дорівнює:

$$P(A)=2184/8568=0{,}255.$$

4. Елементи статистики

Статистика – це науку, що вивчає, обробляє і аналізує кількісні дані про найрізноманітніші масові явища в житті. Найчастіше вона використовується в економіці, політиці та експериментальних дослідженнях. Статистичну інформацію збирають за допомогою спостережень, опитувань, обліків тощо.

При вивченні реальних явищ часто буває неможливо обстежувати всі елементи сукупності. Наприклад, практично неможливо виявити ріст у всіх людей планети. А перевірити, наприклад, справність роботи електричних лампочок у великій партії хоча і реально, але безглуздо. У подібних випадках замість вивчення всіх елементів сукупності, що називають **генеральною сукупністю**, обстежують її значну частину, вибрану випадковим чином. Цю частину називають **вибіркою.** Кожен елемент вибірки називають її **варіантою**.

Результати обстежень вибірки зручно подавати у вигляді таблиці

Ознака (x)	x_1	x_2	…	x_k
Частота (n)	n_1	n_2	…	n_k

де n – **обсяг вибірки**, у якій k значень досліджуваних ознак розподілено по частотах $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Під **частотою** будемо розуміти число, яке показує скільки разів повторюються варіанти із спільною ознакою. В таблиці прийнято варіанти розміщувати в порядку зростання, отримуючи при цьому **варіаційний ряд** $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Іноді вибірку величин чи всю генеральну сукупність цих величин доводиться характеризувати одним числом. На практиці це необхідно, наприклад, для порівняння двох або більше сукупностей за загальною ознакою. Наведемо деякі з них.

Розмах вибірки – це різниця між найбільшим і найменшим значеннями варіаційного ряду.

Мода – це те значення варіанти, яке зустрічається найчастіше (позначається *Mo*). Моду ряду даних звичайно знаходять тоді, коли хочуть з'ясувати деякий типовий показник.

Медіана – це та варіанта, яка поділяє варіаційний ряд навпіл (позначається *Me*). Медіана поділяє впорядкований ряд даних на дві рівні за кількістю елементів частини. Якщо кількість чисел в ряду непарна, то медіана – це число, записане посередині. Якщо кількість чисел у ряду парна, то медіана – це середнє арифметичне двох варіант, що стоять посередині.

Середнім значенням вибірки (позначається $\overline{x}$) називається середнє арифметичне всіх її варіант.

Якщо маємо варіаційний ряд із *n* значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Якщо варіанти $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мають, відповідно, частоти $n_1, n_2, \ldots, n_k$, то, замінюючи однакові доданки в чисельнику на відповідні добутки, одержуємо, що середнє арифметичне можна обчислювати за формулою

$$\overline{x} = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k}{n}.$$

Останню формулу зручно використовувати в тих випадках, коли розподіл випадкової величини за частотами задано у вигляді таблиці.

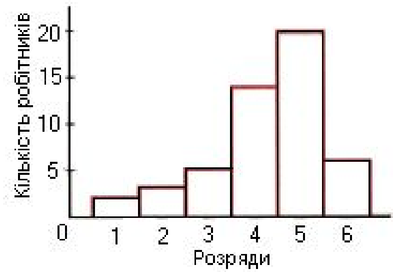
Інформацію про ту чи іншу вибірку часто подають графічно, як правило, у вигляді **гістограм** (стовпцеві діаграма зі сполучених прямокутників) та **полігонів розподілу** (ламана лінія, яка з'єднує послідовно середини верхніх основ прямокутників гістограми).

Приклад 9. Інформацію про вибірку робітників Тернопільської області подано у таблиці.

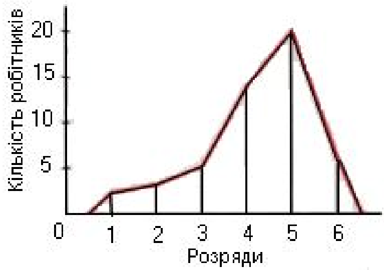
Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	2	3	5	14	20	6	50

Знайдіть розмах, моду, медіану та середнє значення вибірки. Побудуйте гістограму та полігон.

Розв'язування. Розмах варіаційного ряду $R = 6 - 1 = 5$. Варіанта 4 має найбільшу частоту 14, тому $Mo = 4$. Оскільки варіаційний ряд має парну кількість варіант, то $Me = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$. Середнє значення вибірки: $\bar{x} = \frac{2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 14 \cdot 4 + 20 \cdot 5 + 6 \cdot 6}{50} = 4{,}3$.



а) гістограма



б) полігон

§ 11. ПОНЯТТЯ ПОХІДНОЇ, ЇЇ МЕХАНІЧНИЙ І ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ

1. Поняття границі функції в точці

Найпростіше уявлення про границю функції можна одержати, розглядаючи функцію $y = 2x - 1$. Якщо $x = 2$, то відповідне значення функції дорівнює 3. Якщо ж значення її аргументу x із обох боків наближаються до 2, то відповідні значення функції як завгодно близько наближаються до числа 3. Про це свідчать дані таблиці 1, у якій містяться значення функції $y = 2x - 1$ для 10 значень аргументу, близьких до числа 2.

Таблиця 1.

x	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y	2,9	2,92	2,94	2,96	2,98	3	3,2	3,4	3,6	3,8

З графіка функції (рис. 1) видно: чим ближче вибираються на осі Ox значення аргументу до числа 2 (це позначається $x \to 2$ і читається: «x прямує до 2»), тим ближче на осі Oy буде значення $f(x)$ до числа 3.

Іншими словами: різниця $|f(x) - 3|$ може стати і залишатися як завгодно малою, якщо різниця $|x - 2|$ буде досить малою.

Це можна записати так: $f(x) \to 3$ при $x \to 2$, або $\lim\limits_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

Знак lim (читається: «Ліміт») – скорочений запис латинського слова limes (лімес), що в перекладі означає «границя».

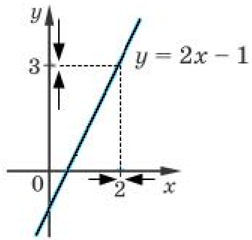


Рис. 1

Означення. ***Число A називається границею функції f(x) у точці*** *$x = a$ (при x, що прямує до a), якщо для будь-якого додатного числа ε знайдеться таке додатне число δ, що при всіх $x \neq a$, які задовольняють нерівності $|x - a| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.*

Пишуть: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Зауваження. Функція може мати границю навіть у такій точці, у якій вона невизначена. Наприклад, областю визначення функції $f(x) = \dfrac{2x}{x}$ є всі дійсні числа, крім числа 0. Для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $\dfrac{2x}{x} = 2$. Тоді при $x \to 0$ значення $\dfrac{2x}{x} \to 2$, тобто $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{x} = 2$.

Границя функції в точці має такі *властивості*:

– функція не може мати двох границь у точці;

– границя постійної дорівнює цій самій постійній, тобто $\lim\limits_{x\to a} c = c$, $c = const$;

– якщо кожна з функцій $f(x)$ і $g(x)$ має границю в точці a, то в цій точці існують границі функцій $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $kf(x)$ і $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$), тобто для яких виконуються рівності:

1) $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x) \pm g(x)\bigr) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\bigl(f(x)\cdot g(x)\bigr) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\bigl(kf(x)\bigr) = k\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $k = const$;

4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Приклад 1. Обчисліть границю функції $f(x)$ при $x \to 3$: а) $f(x) = x^2 - 3x + 1$; б) $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$.

Розв'язування. а) $\lim\limits_{x\to 3}\bigl(x^2 - 3x + 1\bigr) = \lim\limits_{x\to 3} x^2 + \lim\limits_{x\to 3}(-3x) + \lim\limits_{x\to 3} 1 =$

$= \left(\lim\limits_{x\to 3} x\right)^2 - 3\lim\limits_{x\to 3} x + 1 = 3^2 - 3\cdot 3 + 1 = 1$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3} = \dfrac{1}{3+3} = \dfrac{1}{6}$.

Знаходження границь суттєво спрощується для неперервних функцій. Якщо значення $x = a$ входить до області визначення функції $f(x)$, то для багатьох функцій при $x \to a$ значення $f(x) \to f(a)$, тобто $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. Такі функції називаються **неперервними в точці** a. Якщо функція $f(x)$ неперервна в кожній точці деякого проміжку, то її називають неперервною на цьому проміжку. Графіки неперервних функцій зображаються неперервними (нерозривними) кривими на кожному проміжку, що цілком входить до області визначення.

Приклад 2. Знайдіть $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-9}$.

Розв'язування. Оскільки, дробово-раціональна функція $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ є неперервною в кожній точці її області визначення ($x \neq \pm 3$), то $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2-9}=f(1)=\dfrac{1}{1^2-9}=-\dfrac{1}{8}$.

2. Поняття приросту аргументу і приросту функції

Часто постає завдання знайти приріст якоїсь величини. Приріст аргументу чи функції традиційно позначають великою літерою грецького алфавіту Δ (дельта). Дамо означення приросту аргументу і приросту функції.

Нехай *x* – довільна точка, що лежить у деякому околі фіксованої точки x_0 з області визначення функції $f(x)$.

Величина $\Delta x = x - x_0$ називається **приростом незалежної змінної** (або аргументу) у точці x_0.

Враховуючи, що початкове значення аргументу x_0 дістало приріст Δ ($x = x_0 + \Delta x$), то значення функції змінилося на величину $\Delta f = f(x) - f(x_0)$.

Величина $\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ називається **приростом функції *f*** у точці x_0, що відповідає приросту аргументу Δx.

Якщо функція задається формулою $y = f(x)$, то Δf називають також приростом залежної змінної *y* і позначають через Δy

Геометрично приріст аргументу зображується приростом абсциси точки кривої, а приріст функції – приростом ординати цієї точки (рис. 2).

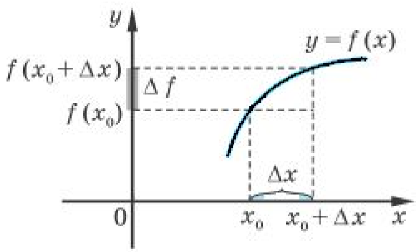


Рис. 2.

Якщо $f(x)$ – зростаюча і $\Delta x > 0$, то $\Delta y > 0$. Якщо $f(x)$ – спадна і $\Delta x > 0$, то $\Delta y < 0$.

Приклад 3. для функції $y = x^2$ знайдіть приріст функції Δy, який відповідає приросту аргументу $\Delta x = 0{,}5$ у точці $x_0 = 1$.

Розв'язування. Маємо $f(x) = x^2$, а $f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2$. Тоді

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 =$$
$$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2 = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}5 + 0{,}5^2 = 1{,}25 .$$

3. Задачі, які приводять до поняття похідної

Задача 1. Розглянемо задачу, відому з курсу фізики, – рух матеріальної точки вздовж прямої. Нехай переміщення x точки в момент часу t дорівнює $s(t)$. Як і в курсі фізики, будемо вважати, що рух відбувається неперервно. Спробуємо за відомою залежністю $s(t)$ визначити швидкість, з якою рухається точка в момент часу t_0 (так звану миттєву швидкість).

Розглянемо відрізок часу від t_0 до $t = t_0 + \Delta t$ (рис. 3). Означимо середню швидкість на відрізку $[t_0; t_0 + \Delta t]$ як відношення пройденого шляху до часу руху:

$$v_{середня} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} .$$

При зменшуванні відрізка часу Δt до нуля помітимо, що значення середньої швидкості наближатися до деякого числа, яке і вважається значенням швидкості в момент часу t_0. Іншими словами, **миттєвою швидкістю** в момент часу t_0 називається границя відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, якщо $\Delta t \to 0$, тобто

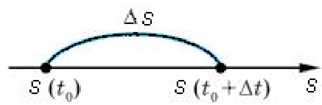


Рис. 3

$$v_{миттєва} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} . \qquad (1)$$

Задача 2. Розглянемо поняття дотичної до графіка функції.

Нехай задана деяка крива і точка M на ній (рис. 4). Візьмемо на цій прямій іншу точку N і проведемо пряму через точки M і N. Цю пряму звичайно називають **січною**. Почнемо наближати точку N до точки M. Положення січної MN буде змінюватися, але при наближенні точки N до точки M воно почне стабілізуватися.

Дотичною до кривої *в даній точці M називається граничне положення січної MN.*

Розглянемо це означення з іншої сторони. Нехай крива – це графік функції $y = f(x)$, а точка *M*, яка знаходиться на графіку, задана своїми координатами $(x_0; y_0) = (x_0; f(x_0))$. Дотичною є деяка пряма, яка проходить через точку *M* (рис. 5).

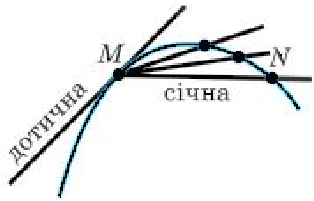


Рис. 4

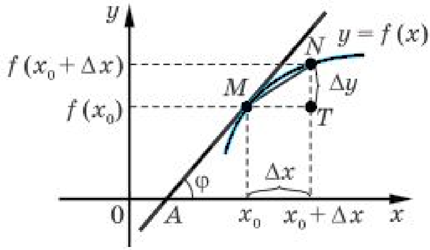


Рис. 5

Щоб побудувати цю пряму, достатньо знати кут φ нахилу дотичної до осі *Ox*.

Нехай точка *N* (через яку проходить січна *MN*) має абсцису $x_0 + \Delta x$. При $\Delta x \to 0$ точка *N*, рухаючись по графіку функції $y = f(x)$, наближається до точки *M*, то величина кута *NMT* наближається до величини кута φ нахилу дотичної *MA* до осі *Ox*. Оскільки $tg\angle NMT = \frac{NT}{MT} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, то при $\Delta x \to 0$ значення $tg\angle NMT$ наближається до $tg\varphi$, тобто

$$tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Розглянуті задачі за своїм змістом дуже схожі: знайти границю відношення виразу виду $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (де $y = f(x)$ – задана функція) при $\Delta x \to 0$. Знайдене таким чином число називають **похідною функції** $y = f(x)$ у точці x_0.

Означення. ***Похідною функції*** $y = f(x)$ *у точці* x_0 *називається границя відношення приросту функції в точці* x_0 *до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 позначається $f'(x_0)$ (або $y'(x_0)$) і читається: «Еф штрих у точці x_0». Коротко означення похідної функції $y = f(x)$ можна записати так:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Функцію $f(x)$, що має похідну в точці x_0, називають **диференційованою** в цій точці. Якщо функція $f(x)$ має похідну в кожній точці деякого проміжку, то кажуть, що ця функція **диференційована на цьому проміжку**. Операція знаходження похідної називається **диференціюванням**.

4. Механічний зміст похідної

Враховуючи означення похідної в точці t_0 для функції $s(t)$:

$$s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

і спів ставляючи одержаний результат з поняттям миттєвої швидкості прямолінійного руху (1), отримаємо рівність

$$v_{миттєва} = s'(t_0).$$

Ця рівність виражає механічний зміст похідної: *значення похідної функції пройденого шляху в даний момент часу t_0 дорівнює миттєвій швидкості руху матеріальної точки в цей момент часу.*

Якщо $s = s(t)$ – залежність пройденого шляху від часу, то

$v = s'(t)$ – швидкість прямолінійного руху ($v = v(t)$);

$a = v'(t)$ – прискорення прямолінійного руху.

Також можна зробити висновок, що *похідна характеризує швидкість зміни функції при зміні аргументу.*

5. Геометричний зміст похідної та рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$

Враховуючи означення похідної функції $y = f(x)$, запишемо результати, одержані при розгляді дотичної до графіка функції.

Як було обґрунтовано вище, тангенс кута φ нахилу дотичної в точці *M* з абсцисою x_0 (рис. 4) обчислюється за формулою (2). З іншого боку, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тоді

$$f'(x_0) = tg\varphi.$$

Нагадаємо, що в рівнянні прямої $y = kx + b$ кутовий коефіцієнт k дорівнює тангенсу кута φ нахилу прямої до осі *Ox* (кут відлічується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки). Отже, якщо k – кутовий коефіцієнт дотичної, то $k = tg\varphi = f'(x_0)$. Таким чином сформулюємо геометричний зміст похідної: *значення похідної в точці* x_0 *дорівнює тангенсу кута, який утворює дотична до графіка функції в точці з абсцисою* x_0 *з додатним напрямом осі Ох, і дорівнює кутовому коефіцієнту цієї дотичної.*

Таким чином, якщо $y = kx + b$ – рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0; f(x_0))$ ($k = f'(x_0)$). Тоді рівняння дотичної можна записати так: $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Щоб знайти значення b, враховуємо, що ця дотична проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$. Отже, координати точки M задовольняють останньому рівнянню, тобто $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$. Звідси $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$, і рівняння дотичної матиме вигляд: $y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Переписавши його отримаємо **загальне рівняння дотичної до графіка функції** $y = f(x)$ **у точці з абсцисою** x_0:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

§ 12. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ

1. Похідні елементарних функцій

Для знаходження похідної елементарної функції $y = f(x)$ можна скористатися означенням похідної функції і притримуватися наступної схеми:

1. *Знайти приріст функції* $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$*, який відповідає приросту аргументу* Δx .
2. *Знайти відношення* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.
3. *Знайти границю відношення* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$.

Це і буде похідна заданої функції.

Користуючись наведеною схемою, знайдемо похідні деяких елементарних функцій.

I. Обчислимо похідну функції $y = c,\ c = const$.

1) Знайдемо приріст функції, який відповідає приросту аргументу Δx :

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = c - c = 0$.

2) Знайдемо відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$

3) Оскільки відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює нулю, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює нулю. Отже, $y' = 0$, тобто $c' = 0$.

II. Обчислимо похідну функції $y = x$.

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = x_0 + \Delta x - x_0 = \Delta x$.

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$.

3) Оскільки відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ постійне і дорівнює 1, то і границя цього відношення при $\Delta x \to 0$ теж дорівнює одиниці. Отже, $y' = 1$, тобто $x' = 1$.

III. Обчислимо похідну функції $y = x^2$.

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2 =$
$= 2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0 \Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$.

3) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$. Це означає, що $y'(x_0) = 2x_0$. Тоді похідна функції $y = x^2$ у довільній точці x дорівнює: $y' = 2x$. Отже, $\left(x^2\right)' = 2x$.

IV. Обчислимо похідну функції $y = \sin x$.

1) $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$
$$= 2\sin\frac{x_0 + \Delta x - x_0}{2}\cos\frac{x_0 + \Delta x + x_0}{2} = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

3) При $\Delta x \to 0$ $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Тоді $\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) \to \cos(x_0)$, а $\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \to 1$ (в курсі вищої математики доводиться, що $\lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$). Отже, $\lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x_0$. Тоді похідна функції $y = \sin x$ у довільній точці x дорівнює $\cos x$. Отже, $(\sin x)' = \cos x$.

Похідні всіх елементарних функцій подано в наступній таблиці.

$c' = 0$, $c = const$	$x' = 1$	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sin x)' = \cos x$	
$(\cos x)' = -\sin x$	$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\cos x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	
$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$	$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a}$

2. Правила диференціювання

Для знаходження похідних у більш складних випадках потрібно користуватися теоремами (правилами диференціювання) знаходження похідної від суми, добутку та частки тих функцій, для яких ми вже знаємо значення похідних, та знаходження похідної складеної функції.

Обґрунтуємо ці правила. Для скорочення записів використаємо такі позначення функцій та їх похідних у точці x_0:

$$u(x_0) = u,\ \ v(x_0) = v,\ \ u'(x_0) = u',\ \ v'(x_0) = v'.$$

Теорема 1. *Якщо функції u і v диференційовані в точці* x_0*, то їх сума диференційована в цій точці і*

$$(u + v)' = u' + v'.$$

Теорема 2. *Якщо функції u і v диференційовані в точці* x_0*, то їх добуток диференційований в цій точці і*

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'.$$

Наслідок. *Якщо функція u диференційована в точці* x_0*, а c – стала (* $c = const$ *), то функція cu диференційована в цій точці і*

$$(cu)' = cu'.$$

Теорема 3. *Якщо функції u і v диференційовані в точці* x_0*, то їх частка* $\frac{u}{v}$ *диференційована в цій точці і*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Приклад 1. Знайдіть похідну функції: а) $y = x^3 + 3x^{-2}$; б) $y = 2x^2(2 - \sin x)$.

Розв'язування. а) $y' = (x^3 + 3x^{-2})' = (x^3)' + (3x^{-2})' = 3x^2 - 6x^{-3}$;

б) $y' = \left(2x^2(2 - \sin x)\right)' = \left(2x^2\right)'(2 - \sin x) + 2x^2(2 - \sin x)' =$

$2\left(x^2\right)'(2 - \sin x) + 2x^2(2' - (\sin x)') = 4x(2 - \sin x) + 2x^2(0 - \cos x) =$

$= 8x - 4x\sin x - 2x^2\cos x.$

Приклад 2. Знайдіть значення похідної функції $y = \frac{x+2}{x^2}$ в точці $x = 1$.

Розв'язування. $y' = \left(\frac{x+2}{x^2}\right)' = \frac{(x+2)' \cdot x^2 - (x+2)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} =$

$$= \frac{1 \cdot x^2 - (x+2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 4x}{x^4} = -\frac{x+4}{x^3} .$$

Отже, $y'(1) = -\frac{1+4}{1^3} = -5$.

3. Похідна складеної функції

Складеною функцією називають функцію від функції. Якщо змінна y є функцією від u: $y = f(u)$, а u, у свою чергу, – функцією від x: $u = u(x)$, то ***y* є складеною функцією від *x***, тобто $y = f(u(x))$.

У такому випадку кажуть, що y є складеною функцією **незалежного аргументу** x, а u називають **проміжним аргументом**.

Наприклад, якщо $y(x) = f(u(x)) = \sin(x-2)$, то $y = f(u) = \sin u$, $u = u(x) = x - 2$.

Теорема 4 (похідна складеної функції). *Якщо функція* $u(x)$ *має похідну в точці* x_0*, а функція* $f(u)$ *– похідну в точці* $u_0 = u(x_0)$*, то складена функція* $y = f(u(x))$ *також має похідну в точці* x_0*, причому*

$$\left(f(u(x))\right)' = f_u'(u) \cdot u_x'(x) .$$

Приклад 3. Знайдіть похідну функції $f(x) = \ln(x^3 + 1)$.

Розв'язування. Враховуючи, що дана функція є складеною, одержимо

$$f'(x) = \left(\ln(x^3+1)\right)' = \frac{1}{x^3+1} \cdot \left(x^3+1\right)' = \frac{1}{x^3+1} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{x^3+1} .$$

§13. ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

1. Монотонність функції. Критичні точки функції

Похідна є важливим інструментом дослідження функції. Зокрема, за допомогою похідної зручно досліджувати функцію на монотонність (тобто на зростання та спадання).

Означення зростаючої і спадної функцій наведені в § 2.

Як видно з рисунка 1, а, у кожній точці графіка зростаючої функції дотична утворює з додатним напрямком осі *Ox* або гострий кут α (тоді $f'(x_0)=tg\alpha>0$), або кут, що дорівнює нулю (тоді $f'(x_1)=tg\alpha=0$)). А в кожній точці графіка спадної функції (рис. 1, б) дотична утворює з додатним напрямком осі *Ox* або тупий кут α (тоді $f'(x_0)=tg\alpha<0$), або кут, що дорівнює нулю (тоді $f'(x_1)=tg\alpha=0$)).

Отже, *якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційована і зростає, то $f'(x_0)>0$ на цьому інтервалі; якщо на якомусь інтервалі функція $f(x)$ диференційована і спадає, то $f'(x_0)<0$ на цьому інтервалі.*

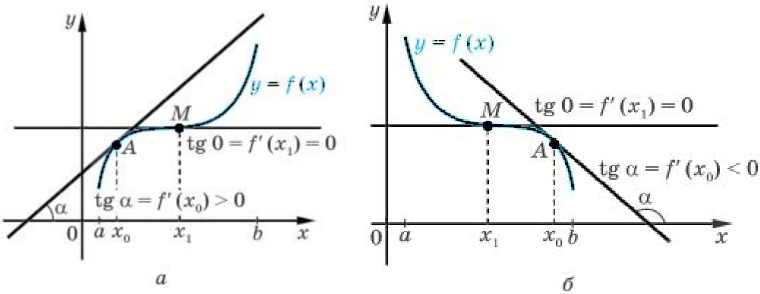


Рис. 1

Вірним є і обернене твердження.

Достатні умови зростання спадання функції. *Якщо $f'(x_0)>0$ у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то функція $f(x)$ зростає на цьому інтервалі. Якщо $f'(x_0)<0$ у кожній точці інтервалу $(a;b)$, то функція $f(x)$ спадає на цьому інтервалі.*

Умова сталості функції. *Функція $f(x)$ є сталою на інтервалі $(a;b)$ тоді і тільки тоді, коли $f'(x_0)=0$ в усіх точках цього інтервалу.*

*Точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує, називаються **критичними точками** цієї функції.*

Проміжки зростання і спадання функції $f(x)$ можна знаходити за схемою:

1. *Знайти область визначення функції* $f(x)$.

2. *Знайти похідну* $f'(x)$.

3. *З'ясувати, у яких точках області визначення функції похідна* $f'(x)$ *дорівнює нулю або не існує (тобто знайти критичні точки цієї функції з рівняння* $f'(x)=0$).

4. *Відмітити знайдені точки на області визначення функції* $f(x)$ *і знайти знак* $f'(x)$ *у кожному з проміжків, на які розбивається область визначення функції (знак можна визначити, обчисливши значення* $f'(x)$ *у будь-якій точці проміжку).*

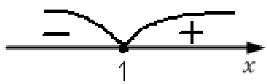
Приклад 1. Дослідимо функцію $f(x)=x^2-2x$ на зростання і спадання.

Розв'язування. 1. Область визначення заданої функції – усі дійсні числа.

2. $f'(x)=2x-2$.

3. Критичні точки знаходимо з рівняння $f'(x)=0$, тобто $2x-2=0$, $x=1$.

4. Відкладаємо знайдену критичну точку на числовій осі та визначаємо на інтервалах знак похідної.



Отже, функція спадає на проміжку $(-\infty;1)$, а зростає на проміжку $(1;+\infty)$.

2. Екстремуми (максимуми і мінімуми) функції

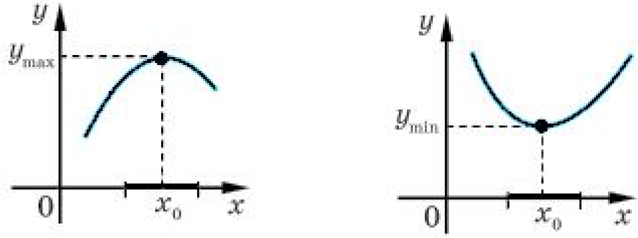
Важливу роль у дослідженні функції відіграють визначення її максимуму та мінімуму.

Розглянемо **окіл точки** x_0, тобто довільний інтервал, що містить точку x_0.

Означення. *Точка* x_0 *з області визначення функції* $y=f(x)$ *називається* ***точкою максимуму (мінімуму)*** *цієї функції, якщо для всіх* x *з деякого околу* x_0 *виконується нерівність* $f(x)>f(x_0)$ *(або відповідно* $f(x)<f(x_0)$*).*

Точки максимуму і мінімуму функції ще називають **точками екстремуму**, а значення функції в цих точках називають **екстремумами**

функції (від латинського слова extremum – екстремум, що означає «крайній»).



а   б

Рис. 2

За означенням значення функції $f(x)$ у точці максимуму x_0 є найбільшим серед значень функції з деякого околу цієї точки (рис. 2, а). Аналогічно значення функції $f(x)$ у точці мінімуму x_0 є найменшим серед значень функції з деякого околу цієї точки (рис. 2, б). Точки екстремуму також називають **локальними екстремумами**.

Точками екстремуму можуть бути тільки критичні точки функції, тобто точки області визначення функції, у яких її похідна дорівнює нулю або не існує. Про це говорить наступна теорема

Теорема 1. (необхідна умова екстремуму). *Якщо x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці існує похідна $f'(x_0)$, то вона дорівнює нулю: $f'(x_0)=0$.*

Отже, для знаходження точок екстремуму функції потрібно насамперед знайти її критичні точки. Але для з'ясування того, чи є відповідна критична точка точкою екстремуму, необхідно провести додаткове дослідження. Цьому часто допомагають достатні умови існування екстремуму в точці.

Теорема 2. (ознака максимуму функції). *Якщо функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і при переході через точку x_0 в напрямі зростання аргументу похідної її похідна змінює знак з «плюса» на «мінус», то точка x_0 є точкою максимуму функції $f(x)$, а точка, переходячи через яку похідна змінює знак з «мінус» на «плюс», – точкою мінімуму.*

Якщо ж функція $f(x)$ неперервна в точці x_0 і її похідна не змінює знак при переході через точку x_0, то точка x_0 не може бути точкою екстремуму функції.

Для дослідження функції на екстремуми можна використовувати наступну схему:

1. *Знайти область визначення функції* $f(x)$.

2. *Знайти похідну* $f'(x)$.

3. *З'ясувати, у яких точках області визначення функції похідна* $f'(x)$ *дорівнює нулю або не існує (тобто знайти критичні точки цієї функції з рівняння* $f'(x)=0$).

4. *Позначити знайдені точки на області визначення функції* $f(x)$ *і знайти знак* $f'(x)$ *у кожному з проміжків, на які розбивається область визначення функції.*

5. *Відносно кожної критичної точки визначити, чи є вона точкою максимуму або мінімуму, чи вона не є точкою екстремуму (теорема 2).*

Приклад 2. Для функції $y = x - 3\ln x$ знайдіть точки екстремуму і значення функції в цих точках.

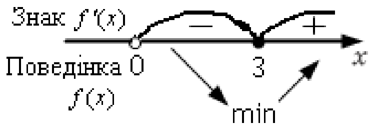
Розв'язування. 1. Область визначення, $D(f): x > 0$, тобто $(0;+\infty)$.

2. $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{x} = \dfrac{x-3}{x}$.

3. Похідна існує на всій області визначення функції $f(x)$.

$f'(x) = 0$. Тоді, $\dfrac{x-3}{x} = 0$, отже, $x \neq 0$, $x = 3$ – критична точка (рис.2).

4. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків.



5. Одержуємо, що функція $f(x)$ спадає на проміжку $(0;3]$ і зростає на проміжку $[3;+\infty)$. У точці 3 похідна змінює знак з мінуса на плюса, отже, це точка мінімуму; у точці 0 функція невизначена, тому вона на екстремум не досліджується.

Отже, $x_{\min} = 3$, $y_{\min} = f(3) = 3 - 3\ln 3$.

3. Загальна схема дослідження функції для побудови її графіка

Для побудови графіка функції (особливо в тих випадках, коли мова йде про побудову графіків незнайомих функцій) доцільно використовувати схему дослідження тих властивостей функції, які допомагають скласти певне уявлення про вид її графіка. Коли таке уявлення вже складене, то після цього можна виконувати побудову графіка функції за знайденими характерними точками. Досліджувати функцію можна за схемою:

1) знайти область визначення функції;

2) дослідити функцію на парність (або непарність) та періодичність;

3) знайти точки перетину графіка з осями координат;

4) знайти похідну і критичні точки функції;

5) знайти проміжки зростання, спадання та точки екстремуму (і значення функції в цих точках);

6) дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення;

7) якщо необхідно, знайти координати додаткових контрольних точок;

8) на основі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Відзначимо, що ця схема є орієнтовною і не завжди потрібно виконувати її повністю. Наприклад, далеко не завжди можна точно знайти точки перетину графіка з віссю *Ох*, навіть якщо ми знаємо, що такі точки існують. Також часто достатньо складно дослідити поведінку функції на кінцях проміжків області визначення. У такому випадку уточнити поведінку графіка функції можна за рахунок знаходження координат точок графіка функції, абсциси яких вибирають так, щоб вони наближалися до кінців проміжків області визначення.

Приклад 3. Дослідіть функцію $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$ та побудуйте її графік.

Розв'язування. 1. Область визначення: $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

2. З такою областю функція не може бути парною, непарною та періодичною.

3. Точки перетину з віссю *Оу*: $x=0$, $y=f(0)=3$. Точок перетину з віссю *Ох* функція немає, оскільки $x^2+3\neq 0$.

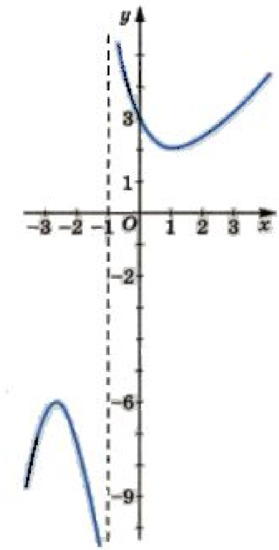
4. Похідна і критичні точки. $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}=\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.

$f'(x)=0$. Тоді, $\dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}=0$, отже, $x=-3$, $x=1$ – критичні точки. Вони разом з точкою $x=-1$ розбивають числову вісь на чотири проміжки.

5. Відмічаємо критичні точки на області визначення функції $f(x)$ і знаходимо знак $f'(x)$ у кожному з одержаних проміжків. Складаємо таблицю, у якій відмічаємо проміжки зростання і спадання та екстремуми функції

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не існує	–	0	+
$f(x)$	↗	– 6	↘	Не існує	↘	2	↗
		max				min	

6. Використовуючи результати дослідження, будуємо графік функції $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.



4. Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Розглянемо неперервну на відрізку $[a;b]$ функцію $y=f(x)$, яка на ньому має лише скінченне число критичних точок. Тоді має місце властивість:

якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку і має на ньому скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і най-

меншого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Таким чином, *щоб знайти найбільше і найменше значення неперервної на відрізку функції, яка має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, достатньо обчислити значення функції в усіх критичних точках і на кінцях відрізка і з одержаних чисел вибрати найбільше і найменше.*

Приклад 4. Знайдіть найбільше і найменше значення функції $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5$ на відрізку $[1;3]$.

Розв'язування. 1. Областю визначення функції є вся множина дійсних чисел.

2. Похідна: $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

3. $f'(x) = 0$. Тоді $-3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критичні точки. Лише точка $x = 2$ попадає у заданий відрізок.

4. $f(1) = -1^3 + 3 \cdot 1^2 + 5 = 7$; $f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 9$ (найбільше);

$f(1) = -3^3 + 3 \cdot 3^2 + 5 = 5$ (найменше).

Знаходження найбільших і найменших значень функції використовуються для розв'язування різноманітних прикладних задач. Це можна робити за схемою:

1) *одну з величин, яку потрібно знайти (або величину, за допомогою якої можна дати відповідь на питання задачі), позначити через x (і за змістом задачі накласти обмеження на x);*

2) *ту величину, про яку говориться, що вона найбільша або найменша, виразити як функцію від x;*

3) *дослідити одержану функцію на найбільше чи найменше значення;*

4) *впевнитися, що одержаний результат задовольняє умову задачі.*

Приклад 5. З усіх прямокутників, площа яких дорівнює 25 см^2, знайдіть прямокутник з найменшим периметром.

Розв'язування. Нехай x (см) – довжина однієї сторони прямокутника, а іншої – $\dfrac{25}{x}$ (см). Тоді периметр прямокутника $P(x) = 2\left(x + \dfrac{25}{x}\right)$ – функція від x. Зрозуміло, що x більше за 0 і менше за 25. Маємо математичну модель задачі: визначити, при якому x

функція $P(x)$, задана на проміжку $(0;25)$, набуває найменшого значення.

Щоб розв'язати задачу, знайдемо похідну даної функції:

$$P'(x)=2\left(1-\frac{25}{x^2}\right).$$

Знайдемо критичні точки: $P'(x)=0$, $2\left(1-\frac{25}{x^2}\right)=0$, $x_1=5$, $x_2=-5$ – не належить проміжку $(0;25)$.

Якщо $x<5$, то $P'(x)<0$, а якщо $x>5$, то $P'(x)>0$. Тому найменшого значення функція $P(x)$ набуває при $x=5$. Отже, розміри прямокутника – 5×5 см.

§14. ПЕРВІСНА ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

1. Поняття первісної. Основна властивість первісної.

У попередніх параграфах ми за заданою функцією знаходили її похідну і застосовували цю операцію диференціювання до розв'язування різноманітних задач. Однією з таких задач було знаходження швидкості і прискорення прямолінійного руху за відомим законом зміни пройденого шляху $s(t)$ матеріальної точки:

$$v(t) = s'(t), \qquad a(t) = v'(t).$$

Але важливо вміти не тільки знаходити похідну заданої функції, а й розв'язувати обернену задачу: знаходити функцію $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$. Наприклад, у механіці часто доводиться визначати рівняння руху $s(t)$, знаючи закон зміни швидкості $v(t)$, а також визначати швидкість $v(t)$, знаючи закон зміни прискорення $a(t)$. Знаходження функції $f(x)$ за її заданою похідною $f'(x)$ називають **операцією інтегрування**.

Таким чином, операція інтегрування обернена до операції диференціювання. Операція інтегрування дозволяє за заданою похідною $f'(x)$ знайти функцію $f(x)$.

Із операцією інтегрування пов'язане поняття первісної функції.

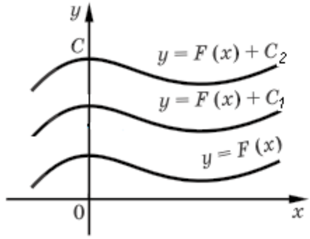
Означення. *Функція $F(x)$ називається **первісною** для функції $f(x)$ на даному проміжку, якщо для будь-якого x із цього проміжку $F'(x) = f(x)$.*

Наприклад, для функції $f(x) = 4x^3$ на інтервалі $(-\infty;+\infty)$ первісною є функція $F(x) = x^4$, оскільки $F'(x) = \left(x^4\right)' = 4x^3$. Зазначимо, що функція $x^4 + 2$ має ту саму похідну $\left(x^4 + 2\right)' = 4x^3$. Отже, функція $x^4 + 2$ також є первісною для функції $f(x) = 4x^3$ на інтервалі **Ошибка! Ошибка внедренного объекта.**. Виходячи з цього, можна сформулювати **основну властивість первісної**.

Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на даному проміжку, а C – довільна стала, то функція $F(x) + C$ також є первісною для функції.

Вираз $F(x) + C$ називають **загальним виглядом первісних** для функції $f(x)$.

Геометрично основна властивість первісної означає, що графіки будь-яких первісних даної функції $f(x)$ одержуються один з одного паралельним перенесенням уздовж осі Oy (рис. 1). Дійсно, графік довільної первісної $F(x)+C$ можна одержати з графіка первісної $F(x)$ паралельним перенесенням уздовж осі Oy на C одиниць.



За основною властивістю первісної сукупність усіх первісних функції $f(x)$ на заданому проміжку задається формулою $F(x)+C$, де C – довільна стала.

Означення. *Сукупність усіх первісних даної функції* $f(x)$ *називається* ***невизначеним інтегралом*** *і позначається символом* $\int f(x)dx$ *тобто*

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

де $F(x)$ *– одна з первісних для функції* $f(x)$, *а* C *– довільна стала.*

У наведеній рівності знак $\int$ називається **знаком інтеграла**, функцію $f(x)$ називають **підінтегральною функцією**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, змінну x – **змінною інтегрування** і доданок C – **сталою інтегрування**.

Наприклад, для функції $f(x)=4x^3$ загальний вигляд первісних записується так: x^4+C, отже, $\int 4x^3dx = x^4+C$.

2. Правила знаходження первісних (правила інтегрування)

Розглянемо правила, подібні до відповідних правил диференціювання.

I. *Якщо* $F(x)$ *і* $G(x)$ *– первісні для функцій* $f(x)$ *і* $g(x)$, *то* $F(x)+G(x)$ *– первісна для функції* $f(x)+g(x)$.

Справді, якщо $F'(x)=f(x)$ і $G'(x)=g(x)$, то $\left(F(x)+G(x)\right)' = F'(x)+G'(x) = f(x)+g(x)$.

II. *Якщо* $F(x)$ *– первісні для функцій* $f(x)$, *а* k *– довільне число, то* $kF(x)$ *– первісна для функції* $kf(x)$.

Адже $\left(kF(x)\right)' = kF'(x) = kf(x)$.

III. *Якщо* $F(x)$ *– первісні для функцій* $f(x)$*, а* k*,* b *– довільні числа (*$k \neq 0$*), то* $\frac{1}{k}F(kx+b)$ *– первісна для функції* $f(kx+b)$.

Адже $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)' = \frac{1}{k} \cdot F'(kx+b) = \frac{1}{k} \cdot kf(kx+b) = f(kx+b)$.

За допомогою невизначеного інтеграла ці правила можна записати так:

I. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$, тобто *інтеграл від суми дорівнює сумі інтегралів від доданків.*

II. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, тобто *сталий множник можна виносити за знак інтеграла.*

III. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b)$.

3. Таблиця первісних (невизначених інтегралів)

Для обчислення первісних (чи невизначених інтегралів), крім правил знаходження первісних, корисно пам'ятати табличні значення первісних для деяких функцій, які наведено в наступній таблиці.

Функція $f(x)$	Загальний вигляд первісних $F(x)+C$	Запис за допомогою визначеного інтеграла
0	C	$\int 0 \cdot dx = C$
1	$x+C$	$\int dx = x+C$
x^n, ($n \neq 1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -ctgx + C$

a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
e^x	e^x+C	$\int e^x dx=e^x+C$

Обґрунтувати цю таблицю можна диференціюванням функції, яка є в її другому стовпці.

Приклад 1. Знайдіть загальний вигляд первісних для функцій: а) $f(x)=x^2+\sin x-3$; б) $f(x)=3\sqrt{x}$.

Розв'язування. а) $F(x)=\frac{x^3}{3}-\cos x-3x+C$;

б) Оскільки $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$, то

$$F(x)=3\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=2\sqrt{x^3}+C=2x\sqrt{x}+C.$$

Приклад 2. Для функції $f(x)=2\cos x$ знайдіть первісну, графік якої проходить через точку $M(\pi;1)$.

Розв'язування. Знайдемо загальний вигляд усіх первісних:
$F(x)=2\sin x+C$.

За умовою графік первісної проходить через точку $M(\pi;1)$, отже, при $x=\pi$ одержуємо $2\sin\pi+C=1$. Звідси $C=1$. Тоді шукана первісна $F(x)=2\sin x+1$.

§15. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

1. Геометричний зміст і означення визначеного інтеграла

Як відмічалося в §14, інтегрування – це дія, обернена до диференціювання. Покажемо, що ця операція тісно пов'язана з задачею обчислення площі.

Нехай на відрізку $[a;b]$ осі Ox задано неперервну функцію $f(x)$, яка набуває на цьому відрізку тільки невід'ємних значень. Фігуру, обмежену графіком функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$, називають **криволінійною трапецією** (рис. 1). Відрізок $[a;b]$ називають основою цієї криволінійної трапеції.

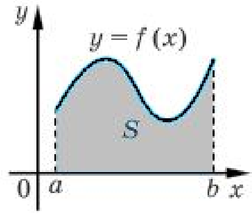


Рис. 1

З'ясуємо, як можна обчислити площу криволінійної трапеції за допомогою первісної функції $f(x)$.

Позначимо через $S(x)$ площу криволінійної трапеції з основою $[a;x]$ (рис. 2, *а*), де x – будь-яка точка відрізка $[a;b]$. При $x = a$ відрізок $[a;x]$ вироджується в точку, і тому $S(a) = 0$, при $x = b$ маємо $S(b) = S$, де S – площа криволінійної трапеції з основою $[a;b]$ (рис. 1).

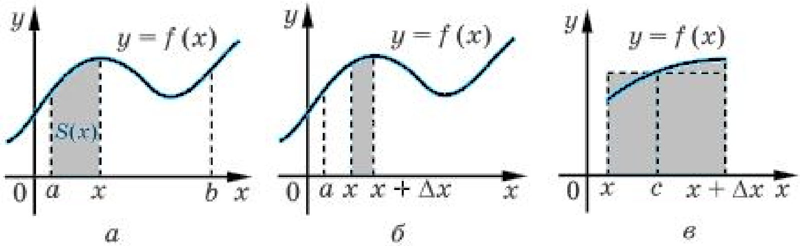


Рис. 2

Доведемо, що $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, тобто що $S'(x) = f(x)$. Для цього надамо змінній x приріст Δx (рис. 2, *б*), від чого функція набуде приросту $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$. Геометрично ΔS – площа фігури, виділеної на рисунку 2, *б*. Розглянемо тепер прямокутник з такою самою площею ΔS, основа якого є відрізок $[x; x + \Delta x]$, а висота – $f(c)$, де c – деяке число з проміжку $[x; x + \Delta x]$ (рис. 2, *в*). Отже, $\Delta S = f(c) \cdot \Delta x$, звідки $\dfrac{\Delta S}{\Delta x} = f(c)$.

Якщо $\Delta x \to 0$, то $c \to x$ і $f(c) \to f(x)$. Тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$, тобто $S'(x) = f(x)$.

Оскільки $S(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то за основною властивістю первісних будь-яка інша первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ при всіх $x \in [a; b]$ відрізняється від $S(x)$ на постійну *C*, тобто

$$F(x) = S(x) + C. \tag{1}$$

Щоб знайти *C*, підставимо $x = a$. Одержуємо $F(a) = S(a) + C$. Оскільки $S(a) = 0$, то $C = F(a)$ і рівність (1) можна записати так:

$$S(x) = F(x) - F(a). \tag{2}$$

Враховуючи, що площа криволінійної трапеції дорівнює $S(b)$, підставляємо в формулу (2) $x = b$ і одержуємо $S = S(b) = F(b) - F(a)$. Отже, **площу криволінійної трапеції (рис. 1) можна обчислювати за формулою**

$$S = F(b) - F(a) \tag{3}$$

де $F(x)$ – довільна первісна для функції $f(x)$.

Таким чином, обчислення площі криволінійної трапеції зводиться до знаходження первісної $F(x)$ для функції $f(x)$, тобто до інтегрування функції $f(x)$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають **визначеним інтегралом функції** $f(x)$ на відрізку $[a; b]$ і позначають так: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Числа *a* і *b* називаються **межами інтегрування**: *a* – нижньою межею, *b* – верхньою. Отже, за наведеним означенням

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Формулу (4) називають **формулою Ньютона–Лейбніца**.

Для зручності значення різниці $F(b) - F(a)$ записують ще так: $F(x)\big|_a^b$.

Наприклад, $\int\limits_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = 9$.

З формул (3) і (4) одержуємо, що площу криволінійної трапеції, обмеженої графіком неперервної і невід'ємної на відрізку $[a; b]$ функції $y = f(x)$, відрізком $[a;b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 1), можна обчислювати за формулою

$$S = \int_a^b f(x)dx \,.$$

Приклад. 1. Обчислити площу фігури, обмеженої прямими $x = 1$, $x = 4$, віссю Ох і графіком функції $y = \sqrt{x}$.

Розв'язування. Зобразивши ці лінії, отримаємо криволінійну трапецію (рис. 3.).

Тоді її площа дорівнює

$$S = \int_1^4 \sqrt{x}dx = \int_1^4 x^{\frac{1}{2}}dx = \left. \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_1^4 = \left. \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right|_1^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{2}{3}\left(2^3 - 1\right) = 4\frac{2}{3} \text{ (кв. од.).}$$

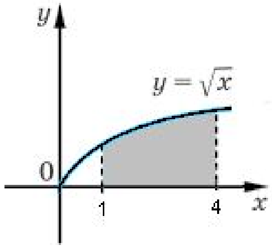


Рис. 3

Означення визначеного інтеграла можна подати через інтегральні суми. Для цього розглянемо криволінійну трапецію, зображену на рисунку 4 (функція $f(x)$ – неперервна на відрізку $[a;b]$). На цьому рисунку основу трапеції – відрізок $[a;b]$ – розбито на n відрізків (не обов'язково рівних) точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (для зручності будемо вважати, що $a = x_0$, $b = x_n$). Через ці точки проведено вертикальні прямі. На першому відрізку вибрана, наприклад, його середин – точка c_1 (може бути й довільна точка відрізка), і на цьому відрізку як на основі побудований прямокутник із висотою $f(c_1)$. Аналогічно на другому відрізку вибрана його середина c_2, і на цьому відрізку як на основі побудований прямокутник із висотою $f(c_2)$ і т. д.

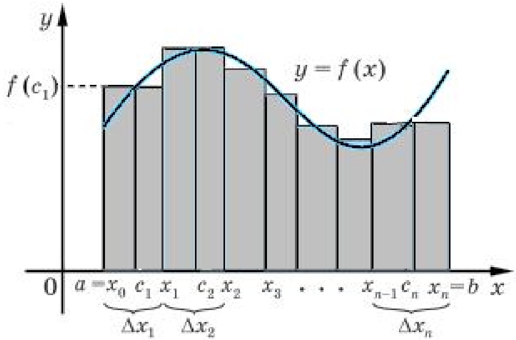


Рис. 4

Площа S заданої криволінійної трапеції наближено дорівнює сумі площ побудованих прямокутників. Позначимо цю суму через S_n, довжину першого відрізка через $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, другого – через $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ і т. д. Тоді

$$S \approx S_n = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n . \qquad (5)$$

Суму (5) називають інтегральною сумою функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$.

При цьому вважають, що функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і може набувати будь-яких значень: додатних, від'ємних і рівних нулю (а не тільки невід'ємних, як для випадку криволінійної трапеції). Якщо $n \to \infty$ і довжини відрізків розбиття прямують до нуля, то інтегральна сума S_n прямує до деякого числа, яке і називають визначеним інтегралом функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx$.

2. Властивості визначених інтегралів

При обчисленні визначеного інтеграла можна користуватися наступними властивостями:

1) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

2) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, $c \in [a;b]$.

Властивості 1 і 2 можна легко обґрунтувати з допомогою формули Ньютона–Лейбніца. Покажемо доведення властивості 3:

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^c + F(x)\Big|_c^b = F(c) - F(a) + F(b) - F(a) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

3. Обчислення площ фігур

Обґрунтування формули площі криволінійної трапеції та приклади її застосування було наведено вище в пункті 1.

З'ясуємо, як можна обчислити площу фігури, *обмеженої зверху графіком функції* $y = f_2(x)$, *знизу графіком функції* $y = f_1(x)$, *а також вертикальними прямими* $x = a$ *і* $x = b$ ($a < b$)*; функції* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$ *неперервні і невід'ємні на відрізку* $[a;b]$ *і* $f_2(x) \ge f_1(x)$ *для всіх* $x \in [a;b]$ (рис. 5).

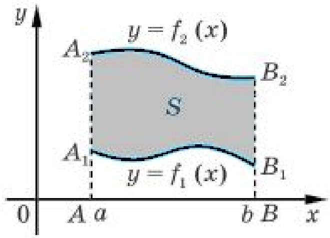


Рис. 5

Площа S цієї фігури дорівнює різниці площ S_2 і S_1 криволінійних трапецій (S_2 – площа криволінійної трапеції AA_2B_2B, а S_1 – площа криволінійної трапеції AA_1B_1B). Але

$S_1 = \int\limits_a^b f_1(x)dx$, $S_2 = \int\limits_a^b f_2(x)dx$.

Отже, $S = S_2 - S_1 = \int\limits_a^b f_2(x)dx - \int\limits_a^b f_1(x)dx = \int\limits_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx$. Таким чином, площу заданої фігури можна обчислювати за формулою

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx\,.$$

Ця формула буде правильною і в тому випадку, коли задані функції не є невід’ємними на відрізку $[a;b]$ – достатньо виконання умов, що функції $f_2(x)\geq f_1(x)$ для всіх $x\in[a;b]$ (рис. 6).

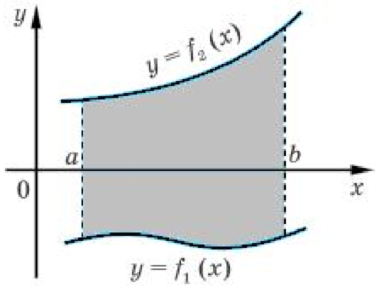


Рис. 6

Приклад 2. Обчисліть площу фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$ та $y=x^2$.

Розв’язування. Зобразимо задані лінії (рис. 7) і знайдемо абсциси точок їх перетину:

$$x^2=\sqrt{x}$$

тоді $x^4=x$, $x^4-x=0$, $x(x^3-1)=0$, $x=0$ або $x=1$.

Площа заданої фігури дорівнює

$$S=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx-\int_0^1 x^2dx=$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\text{ (кв. од.).}$$

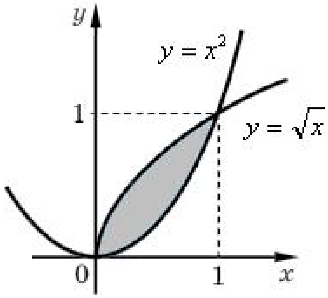


Рис. 7

4. Обчислення об’ємів тіл обертання

Задача обчислення об’єму тіла за допомогою визначеного інтеграла аналогічна до задачі знаходження площі криволінійної трапеції. Нехай криволінійна трапеція спирається на відрізок $[a;b]$ осі Ox і обмежена зверху графіком функції $y=f(x)$, яка невід’ємна і неперервна на відрізку $[a;b]$. Внаслідок обертання цієї криволінійної трапеції навколо осі Ох утворюється тіло (рис. 7).

Поділимо відрізок $[a;b]$ на n відрізків однакової довжини точками $x_0=a<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ і припустимо, що

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

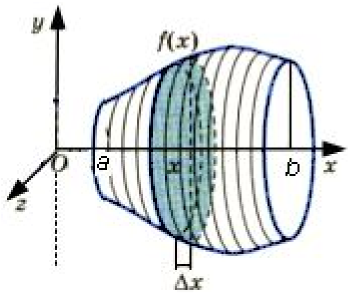


Рис. 8

Через кожну точку x_k проведемо площину, перпендикулярну до осі Ox. Ці площини розрізають дане тіло на шари чи циліндри з малими висотами Δx (рис. 8).

Радіус кожного такого шару залежить від змінної x і дорівнює $f(x)$. Об'єм шару між площинами, що відповідає змінній x, дорівнює $\pi f^2(x)\Delta x$. При достатньо великих n об'єм усього тіла наближено дорівнює інтегральній сумі

$$V \approx \pi f^2(x_0)\Delta x + \pi f^2(x_1)\Delta x + \ldots + \pi f^2(x_n)\Delta x = V_n.$$

При $n \to \infty$ $V_n \to V$. За означенням визначеного інтеграла через інтегральні суми одержуємо, що $V = \int_a^b \pi f^2(x)dx = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.

Приклад 3. Обчисліть об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лінією $y = 4 - x^2$ та віссю Ox.

Розв'язування. Знайдемо абсциси точок перетину заданих ліній.

$4 - x^2 = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

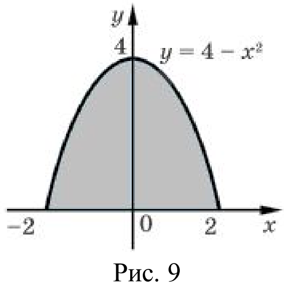


Рис. 9

Оскільки задана фігура – криволінійна трапеція (рис. 9), то об'єм тіла обертання дорівнює

$$V = \pi \int_{-2}^{2} (4 - x^2)^2 dx = \pi \int_{-2}^{2} (16 - 8x + x^4)dx =$$

$$\pi\left(16x - 8 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 76\frac{4}{5}\pi \text{ (куб. од).}$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Бевз Г.П. Математика : 10 кл. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандару / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, – 2-ге вид. – К. : Генеза, 2011. – 272 с.
2. Бевз Г.П. Математика : 11 кл. підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : рівень стандару / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, – 2-ге вид. – К. : Генеза, 2011. – 320 с.
3. Валєєв К. Г. Елементарна математика для студентів, слухачів ПО, абітурієнтів : навч. посіб. / К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова – К. : КНЕУ, 2006. – 548 с.
4. Мерзляк А.Г. Алгебра. 11 клас : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, проф. рівень / Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. – Х. : , 2011. – 431 с.
5. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : 10 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл : академ. рівень / Є. П. Нелін. – Х. : Гімназія, 2010. – 416 с.
6. Нелін Є. П. Алгебра : 11 кл. : підруч. для загальноосвіт. навч. закл. : академ. рівень, проф. рівень / Є. П. Нелін, О. Є. Долгова. – Х. : , 2011. – 448 с.
7. Неміш В.М. Елементарна математика : навч. посіб. / В.М. Неміш, А.І. Процик, О.С. Башуцька ; за ред. М.І. Шинкарика. – Тернопіль : «Економічна думка», 2009. – 304 с.

ЗМІСТ