ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Микола НЕДАШКОВСЬКИЙ, Василь МУРАВСЬКИЙ

ОПТИМІЗСЦІЯ·ПОРТФЕЛЯ·ЦІННИХ·ПСПЕРІВ·В·БСНКІВСЬКИХ УСТСНОВСХ

Розглянуто основні проблеми, з якими стикаються банківські установи при прийнятті інвестиційних рішень, запропоновано низку критеріїв і методів відбору інвестиційних проектів. Запропоновано моделі оцінки безпеки, які включають вплив інвестиційних рішень на доходи банків від своїх портфелів цінних паперів і на невизначеність, пов'язану з цими доходами. Створено (на основі існуючої теорії) динамічну модель оптимізації портфеля цінних паперів та запропоновано ефективний метод реалізації цієї моделі.

Основою розвитку економіки країни є стабільність фінансово-банківської системи. Прихід на фінансовий ринок України іноземних банків загострив конкуренцію, зумовив застосування банками методів стратегічного планування і управління. Орієнтація банків на попит і потреби ринку, на запити клієнтів і надання таких банківських послуг, які користуються попитом і дають заплановані прибутки, висунула нові вимоги щодо підготовки висококваліфікованих фахівців і їх ефективного використання. Появилась потреба у застосуванні нових інформаційних технологій, у використанні математичного апарату з метою здійснення багатоваріантних розрахунків для прийняття обґрунтованих і оптимальних рішень.

Важливими умовами ефективної роботи банків є: наявність фахівців, які володіють сучасними знаннями, в тому числі і в області математичного моделювання економічних процесів, використання сучасної комп'ютерної техніки і нових технологій для забезпечення якісного управління банківською діяльністю; побудова оптимальної стратегії і ділового бізнес-планування банку з врахуванням реальності задач, що розв'язуються; управління кредитним портфелем як основним джерелом банківських ризиків, оптимізація операцій з активами і пасивами банку, ефективна інвестиційна політика; заборона ризикованої і ненадійної банківської практики.

Ці проблеми і визначають *актуальність* досліджень в постановці та ефективному розв'язанні задач, які виникають в процесі досягнення основної мети банківської діяльності – отриманні очікуваного прибутку при одночасній мінімізації ризиків.

Значне місце серед задач планування та покращення банківської діяльності займають задачі оптимізації портфеля цінних паперів. Математичні моделі, що дозволяють визначити найкращий набір цінних паперів, які забезпечують очікуваний прибуток і при цьому здійснюють хеджирування шляхом оптимізації, розглядаються у *багатьох публікаціях вітчизняних та зарубіжних вчених*. Вивченню цих питань присвячено праці С. І. Шелобаєва, С. А. Минка, Е. А. Ровба, К. К. Кузьмича, Гаррі Марковіца, Джона Р. О'Брайєна, Санджея Шривастава, Майкла Бромвича, Ральфа Вінса та ін. [1, 2, 4–7].

Метою даного дослідження є аналіз основних досягнень сучасної математичної та економічної науки в фінансовому аналізі та організації торгівлі цінними паперами, створенні на основі існуючих теорій динамічної моделі для оптимізації портфеля цінних паперів, запропонування ефективних методів реалізації цієї моделі.

Під фінансовим ринком розуміють сукупність попиту, пропозицій і реалізації цінних паперів. Учасниками фінансового ринку виступають банки, страхові товариства, інші фінансові структури, громадяни. Результати багатьох операцій з цінними паперами та їх характеристики наперед передбачити неможливо. З цієї причини для застосування певних наукових методів приймають деякі застереження:

а) психологічні мотиви не враховуються. Кожний учасник ринку намагається діяти так, щоб досягнути найбільшого прибутку, а не на зло конкурентам. Це принципове положення для застосування наукових методів аналізу ринку;

б) показники ринку можна моделювати як випадкові величини, що дає можливість використовувати теоретико-ймовірносні та статистичні методи;

в) для реалізації моделі необхідно нагромадити певну інформацію, якої повинно бути достатньо для статистичної обробки з метою отримання оцінок необхідних показників.

У загальному випадку фінансові операції ризиковані, оскільки точний дохід від них наперед передбачити неможливо. Ризик виникає тоді, коли не зрозуміла повністю ситуація і не зрозуміло, як будуть розвиватися події в майбутньому. На подолання прогалин в інформації при розв'язанні задач використовують різні інформаційні системи обробки і прийняття рішень. Ризик від незнання таким чином можна звести до нуля.

Залишається випадковість. У зв'язку з цим виникає ряд питань: 1) Який середній очікуваний дохід? 2) Яка ймовірність отримання доходу не менше заданого? 3) Який ризик цієї операції? 4) Яку операцію вибрати, якщо у них різні ризики і доходи? 5) Як отримати бажаний дохід з ймовірністю не менше заданої? На ці питання дає відповідь теорія ймовірності і математична статистика.

На фінансовому ринку перебуває в обігу велика кількість цінних паперів, ефективність і ризикованість яких різна. Малоризикові цінні папери, як правило, малодохідні. Високодохідні, як правило, більш ризикові. Купуючи акції однієї компанії, інвестор ставить свій добробут в залежність від однієї компанії. Якщо ж вкладає кошти в акції декількох компаній, то ефективність сформованого таким чином портфеля цінних паперів залежатиме від усередненого курсу кількох компаній.

Портфельний підхід має на меті максимізацію доходу від цінних паперів при одночасній мінімізації ризиків за рахунок диверсифікації. Зниження ризиків шляхом поєднання цінних паперів (диверсифікація портфеля) визначає ефект при зберіганні портфеля.

Оскільки формування портфеля цінних паперів визначається стратегією банку, то процес управління портфелем включає наступні моменти:

а) необхідно чітко визначити і формалізувати мету банку у вигляді математичних критеріїв оптимізації при раціональному поєднанні обмежень по рівнях доходності і ризику.

б) потрібно виробити стратегію банку на основі аналізу існуючої ситуації на фінансовому ринку, запропонувати нові фінансові інструменти і вибрати оптимальне поєднання напрямків диверсифікації.

в) необхідно реалізувати певну стратегію банку з формування оптимального портфеля цінних паперів на основі якісного прогнозу настання тої чи іншої ситуації на фінансовому ринку і ймовірності її настання.

Таким чином, ми змушені будувати такі моделі безпеки, які будуть включати вплив інвестиційних рішень як на доходи, отримані від портфелів цінних паперів, так і на невизначеність, пов'язану з цими доходами. Ці моделі будуть будуватися з використанням концепції теорії інвестиційного портфеля (portfolio analysis). Ця теорія встановлює, що ринкова вартість конкретного цінного паперу залежить від ризику і доходу, який вона приносить, тоді, коли він знаходиться в портфелі з іншими цінними паперами. Нашою метою є побудова моделі оцінки і відбору інвестиційних проектів такого типу. Розглянемо основні положення теорії інвестиційного портфеля, використаємо цю теорію для побудови моделей оцінки інвестиційних портфелів і конкретних цінних паперів, розглянемо характеристики правил прийняття рішень, які слідують з цих моделей.

При побудові моделі ми повинні прийняти низку важливих припущень.

- під прибутком від цінного паперу надалі будемо вважати питомий прибуток як відношення приросту вартості цінного паперу за період до початкової вартості;
- купуючи цінні папери, ми оплачуємо лише їхню вартість на ринку, будь які операційні чи податкові витрати відсутні;
- приймаємо рішення, яке є обов'язковим на період дослідженням, будь-які зміни в цьому періоді не проводяться;
- ми вміємо прогнозувати очікувану величину прибутку від кожного цінного паперу і використовуємо цю величину для виміру вигідності цього цінного паперу;
- ми можемо прогнозувати середньоквадратичне відхилення розподілу ймовірності доходів від кожної акції. Коли акція розглядається окремо, ця величина є повним мірилом ризику;
- ми вміємо передбачити кореляцію для будь-якої пари акцій;
- привабливість цінного паперу чи портфеля повністю визначається трьома змінними: очікуваним доходом; індивідуальним ризиком, який вимірюється середньоквадратичним відхиленням доходів; кореляцією даних доходів з доходами від інших цінних паперів.

При виборі того чи іншого набору цінних паперів (вмісту портфелю) інвестор користується певними правилами. Тому теорія інвестиційного портфеля вимагає введення певних припущень щодо співвідношень між ризиком і доходом:

– вважається, що при інших рівних умовах інвестор вибирає варіант з більшим доходом;

– інвестор ухиляється від ризику, віддаючи перевагу меншому ризику з можливих;

– на основі приведених припущень приймаємо рішення, що, по-перше, портфель з найменшим середньоквадратичним відхиленням вибирається з двох наборів цінних паперів з однаковим очікуваним доходом; по-друге, портфель з найбільшою нормою рентабельності вибирається з двох наборів, які мають одинаків ризик.

Таким чином, інвестор буде прагнути при виборі портфеля цінних паперів максимізувати свій очікуваний дохід при даному ризику або мінімізувати свій ризик при даному рівні доходів.

Побудова динамічної моделі задачі оптимізації портфеля цінних паперів.

Розглянемо ***n*** видів цінних паперів, з яких можна сформувати портфель. Кожний з них характеризується фактичними прибутками $E_1(t), E_2(t), ..., E_n(t)$, які є випадковими величинами, і відповідними очікуваними прибутками $U_1(t), U_2(t), ..., U_n(t)$, які є математичними сподіваннями цих випадкових величин. Крім того, для кожного цінного паперу відома дисперсія та для кожної пари цінних паперів відомий коефіцієнт кореляції.

Якщо інвестор розподілив кошти частками

$$0 \le x_i(t) \le 1, \quad i = 1,2,..., n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$$

для придбання різних цінних паперів, то очікуваних питомий прибуток від усього пакету буде рівний

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) U_i(t)$$ Розподіл

$col(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)), i = 1,2,...,n, \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$ називається структурою портфеля цінних паперів.

Задамо умову: очікуваний питомий прибуток всього пакету цінних паперів повинен бути рівний заданому значенню U_p. Отримуємо систему обмежень для оптимізаційної задачі:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1 \qquad (1)$$

$$0 \le x_i(t) \le 1, \quad i = 1,2,..., n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} U_i(t) x_i(t) = U_p \qquad (3)$$

Будемо вважати, що залежність від часу величин $E_i(t)$, $U_i(t)$, $x_i(t)$ має поліноміальний характер.

Алгоритми вибору опорного плану задачі оптимізації.

Матриця $U(t)$ системи обмежень (3) є регулярною матрицею розміру $n \times n$, елементи якої – лінійні многочлени, $X(t)$ – вектор $\left(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)\right)^T$, $B(t)$ – вектор лінійних поліномів $\left(b_1(t), b_2(t), \ldots b_n(t)\right)^T$.

За таких умов розв'язок $X(t)$ системи обмежень (3) можна шукати у вигляді ряду:

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(t) t^k \tag{4}$$

де X_k, $k \geq 0$ – вектор, компоненти якого мають коефіцієнти із поля дійсних чисел , що обчислюються за формулою [5]:

$$U_0 X_k = -\sum_{i=1}^{\min(k,\partial)} U_i X_{k-i} + \begin{cases} b^{(k)}, & 0 \leq k \leq \partial; \\ 0, & \partial < k, \end{cases} \tag{5}$$

де ∂ – степінь матриці $U_k(t)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots)$.

Матрицю $U(t)$ і вектор $B(t)$ можна подати у вигляді матричних многочленів:

$U(t) = U_1 t + U_0$, $B(t) = B_1 t + B_0$

Твердження 1. Ряд (4), який є формальним розв'язком системи (3), збігається при виконанні

$$t \in \left(-\left\| U_0^{-1} U_1 \right\|^{-1}; \left\| U_0^{-1} U_1 \right\|^{-1} \right).$$

Доведення. Згідно формули (5) для коефіцієнти ряду (4) можна записати:

$$\left. \begin{array}{l} X_0 = U_0^{-1} B_0 \,, \\ X_1 = U_0^{-1} \left[B_1 - U_1 X_0 \right] , \\ X_2 = U_0^{-1} \left[-U_1 X_1 \right] , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^{(k)} = U_0^{-1} \left[-U_1 x^{(k-1)} \right] , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} \tag{6}$$

Тоді розв'язок системи (3) може бути записаний у вигляді ряду:

$$X(\lambda) = U_0^{-1}[B_0 + (B_1 - U_1 X_0)t - U_1 X_1 t^2 - U_1 X_2 t^3 - \ldots - U_1 X_k t^{k+1} - \ldots].$$

Якщо в (6) для всіх $k = 1,2,3,\dots$ послідовно замінити X_k на X_{k-1}, то одержимо

$$X_0 = U_0^{-1}B_0,$$
$$X_1 = U_0^{-1}\left[B_1 - U_1U_0^{-1}B_0\right],$$
$$X_2 = -U_0^{-1}U_1U_0^{-1}\left[B_1 - U_1U_0^{-1}B_0\right],$$
$$X_3 = \left[U_0^{-1}U_1\right]^2 U_0^{-1}\left[B_1 - U_1U_0^{-1}B_0\right],$$

. . . .

$$X_k = (-1)^{k-1}\left[U_0^{-1}U_1\right]^{k-1}U_0^{-1}\left[B_1 - U_1U_0^{-1}B_0\right],$$

. . . .

А розв'язок системи (3) можна записати у вигляді:

$$X(t) = U_0^{-1}B_0 + U_0^{-1}(B_1 - U_1U_0^{-1}B_0)\,t - U_0^{-1}U_1U_0^{-1}(B_1 - U_1U_0^{-1}B_0)\,t^2 +$$
$$+(U_0^{-1}U_1)^2U_0^{-1}(B_1 - U_1U_0^{-1}B_0)t^3 + \dots + (-1)^{k-1}(U_0^{-1}U_1)^{k-1}\times$$
$$\times U_0^{-1}(B_1 - U_1U_0^{-1}B_0)t^k + \dots = U_0^{-1}B_0 + \Big[t - (U_0^{-1}U_1)t^2 + (U_0^{-1}U_1)^2t^3 +$$
$$+\dots+(-1)^{k-1}(U_0^{-1}U_1)^{k-1}t^k + \dots\Big]\times U_0^{-1}\left[B_1 - U_1U_0^{-1}B_0\right] \quad .(7)$$

Розглянемо матричний степеневий ряд

$$t - U_0^{-1}U_1t^2 + (U_0^{-1}U_1)^2t^3 + \dots + (-1)^{k-1}(U_0^{-1}U_1)^{k-1}t^k + \dots \quad (8)$$

За ознакою Даламбера ряд (8) збігається, якщо для його членів a_k і a_{k+1} виконується нерівність

$$\left\|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\| < 1.$$

Застосувавши цю ознаку для ряду (8), одержимо

$$\left\|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right\| = \left\|U_0^{-1}U_1\right\|\cdot|t| < 1.$$

Звідки

$$|t| < \frac{1}{\left\|U_0^{-1}U_1\right\|} = \left\|U_0^{-1}U_1\right\|^{-1} \quad (9)$$

Таким чином, радіусом збіжності степеневого ряду (8) є інтервал

$$\left(-\left\|U_0^{-1}U_1\right\|^{-1};\left\|U_0^{-1}U_1\right\|^{-1}\right). \quad (10)$$

Теорему доведено.

Крім системи обмежень, (3) отриманий вектор $X(t)$ повинен задовольняти умову невід'ємності. Отже, серед значень параметра t із радіусу збіжності степеневого ряду (8) треба вибрати ті, для котрих $X(t) \geq 0$. Після чого серед множини векторів $X(t)$ на кожному допустимому інтервалі зміни параметра t лишається знайти такий, що обертав би цільову функцію $L(X(t))$ в максимум.

Отже, можна так сформулювати алгоритм пошуку розв'язку задач параметричного програмування (3):

– знаходять множину розв'язків системи (3), як розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь з λ-матрицями;

– визначають множину значень параметра t, для яких $X(t) \geq 0$;

– на кожному інтервалі зміни параметра λ досліджують цільову функцію $L(X(t))$ на екстремум і знаходять її найбільше значення.

Визначення ризиків портфеля цінних паперів.

Оцінка ризиків портфеля цінних паперів здійснюється в кожний окремий момент часу на основі оцінки дисперсій кожного виду цінних паперів та парних коефіцієнтів кореляції, які мають статичний характер та визначаються емпірично на основі даних за попередні періоди. Тому зафіксуємо момент часу $t=t_0$ і введемо позначення $x = x(t_0),\ E = E(t_0),\ U = U(t_0)$.

Розсіювання доходів по цінних паперах відносно їх очікуваних значень є для інвестора мірою ризику, зв'язаною з кожною акцією. Це розсіювання вимірюється

або середньо-квадратичним відхиленням σ_i, або дисперсією D_i відносно очікуваного прибутку U_i. Але невизначеність, пов'язана з портфелем, не може бути виміряна простим середньозваженим значенням їх окремих середньоквадратичних відхилень чи дисперсій. Невизначеність портфеля залежить від того, як прибутки від усіх акцій міняються спільно. Портфелі, що складаються з цінних паперів, на які впливають одні і ті ж чинники, є більше ризикованими, ніж ті, які підпадають під вплив різних чинників. В останньому випадку прибутки нижче очікуваного значення за одними цінними паперами можуть бути пов'язані з більш високими доходами за іншими. Масштаби цих проявів залежать від наступних чинників: відносної частки кожного цінного паперу в портфелі; величини їх відносних дисперсій чи середньо-квадратичних відхилень; щільності зв'язку між їхніми прибутками.

Про два перших чинники уже йшлося, розглянемо третій чинник.

Обмежимося на деякий час портфелем із двох типів цінних паперів. Отримані результати узагальнимо на портфель з довільної кількості цінних паперів.

Дисперсія портфеля двох цінних паперів s та j записується так:

$$D_p = \sum p_i (E_p - U_p)^2, \qquad (11)$$

де E_p – кожний можливий прибуток портфеля, U_p – очікуваний прибуток, p_i – ймовірність отримання прибутку E_p. Кожний E_p є зважена сума пари окремих прибутків від двох цінних паперів ***s*** та ***j***, вагами є частки ***s*** та ***j*** в портфелі x_j та x_s. Аналогічно U_p є середньозважений очікуваний дохід від двох цінних паперів.

Тоді (11) перепишемо

$$D_p = \sum p_i((x_jE_j + x_sE_s) - (x_jU_j + x_sU_s))^2 =$$
$$\sum p_i((x_jE_j + x_sE_s)^2 + (x_jU_j + x_sU_s)^2 - 2(x_jE_j + x_sE_s)(x_jU_j + x_sU_s)) =$$
$$\sum p_i((x_jE_j)^2 + (x_sE_s)^2 + 2(x_jE_jx_sE_s) + (x_jU_j)^2 + (x_sU_s)^2 + 2(x_jU_jx_sU_s) -$$
$$- 2x_j^2(E_jU_j) - 2x_jx_s(E_jU_s) - 2x_sx_j(E_sU_j) - 2x_s^2(E_sU_s)) =$$
$$\sum p_i(x_j^2(E_j^2 + U_j^2 - 2(E_jU_j)) + x_s^2(E_s^2 + U_s^2 - 2(E_sU_s)) + 2x_jx_s(E_jE_s + U_jU_s - E_jU_s - E_sU_j)) =$$
$$\sum p_i(x_j^2(E_j - U_j)^2 + x_s^2(E_s - U_s)^2 + 2x_jx_s((E_j - U_j)(E_s - U_s))) = x_j^2D_j + x_s^2D_s + 2x_jx_s\,cov(js),$$

де

$$cov(js) = \sum p_i((E_j - U_j)(E_s - U_s)) = (\sum p_i \frac{(E_j - U_j)(E_s - U_s)}{\sigma_j\sigma_s})\sigma_j\sigma_s = r(js)\sigma_j\sigma_s$$

Тут ***r(js)***- коефіцієнт кореляції між двома акціями ***s*** та ***j***. Коефіцієнт кореляції є звичайним статистичним показником, що використовується для вимірювання ступеня зв'язку між змінними. Кажуть, що прибутки від двох цінних паперів позитивно корелюють, якщо великі відхилення понад очікувані значення прибутку за одним цінним папером зв'язані з подібними відхиленнями за другим. Екстремальний приклад позитивної кореляції виникає тоді, коли кожне відхилення прибутку за одним цінним папером однозначно пов'язане з подібним відхиленням прибутку за іншим цінним папером. В цьому випадку говорять, що прибутки за цінними паперами лінійно корелюють і значення прибутку за одним цінним папером точно прогнозує прибуток за другим.

Отже, ризик, пов'язаний з кожним цінним папером, при окремому розгляді вимірюється дисперсією (чи середньо-квадратичним відхиленням) його прибутку. Ступінь, з яким на ці прибутки впливають ці жчинники, що і на інші акції, вимірюється коваріацією цих доходів з доходами по інших цінних паперах. Таким чином, кожний цінний папір в поєднанні з іншими цінними паперами, що входять до портфеля, приносить в цей портфель власний ризик, а також впливає на загальну невизначеність всього портфеля.

Наша формула загального ризику портфеля з двох цінних паперів може бути узагальнена для портфеля з ***n*** цінних паперів. Кожний цінний папір вносить в загальний ризик свій вклад, рівний сумі його дисперсії, зваженої по квадрату його частки в портфелі, та його коваріації з всіма іншими цінними паперами, зваженими по добутку його частки в портфелі на частку інших акцій, з якими він корелює. Вклад цінного паперу ***i*** в загальний ризик портфелю можна записати так:

$$x_i^2D_i + \sum_{j=1}^{n} x_ix_j\,cov(ij)$$

Загальний ризик портфеля з ***n*** цінних паперів є сумою ризиків кожного цінного паперу:

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} D_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_i x_j \, cov(ij) \tag{12}$$

Оскільки дисперсія кожного цінного паперу є в певному смислі коваріацією його прибутку з самим собою, то в (5) можна включити власну дисперсію і формула отримає вигляд:

$$D_p = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, cov(ij) \tag{13}$$

З врахуванням знайденого ризику портфеля цінних паперів на основі формул (1)-(3) та (13) сформулюємо наступну задачу оптимізації:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} x_i x_j \, cov(ij) \quad \to min \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ 0 \le x_i \le 1, \quad i = 1,2,..., \; n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i U_i = U_p \end{cases} \tag{14}$$

Отримана задача є задачею квадратичного програмування і називається задачею Марковіца.

Для її розв'язання побудуємо функцію Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \, cov(ij) - \lambda(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1) - \mu(\sum_{i=1}^{n} x_i U_i - U_p)$$

Зведемо задачу на умовний екстремум до задачі на безумовний. Для цього побудуємо систему з n+2 рівнянь:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial x_s} = 2\sum_{i=1}^{n} cov(i,s) x_i - \lambda - \mu U_s = 0, s = 1,2,...,n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i - 1 = 0 \quad , \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} x_i U_i - U_p = 0 \end{gathered} \tag{15}$$

Введемо позначення:

$$G = \begin{pmatrix} cov(1,1) & cov(1,2) & ... & cov(1,n) \\ cov(2.1 & cov(2,2) & ... & cov(2.n) \\ ... & ... & ... & ... \\ cov(n.1) & cov(n,2) & ... & con(n,n) \end{pmatrix}, \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ ... \\ U_n \end{pmatrix}, x^T = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad U^T = (U_1, U_2, ..., U_n)$$

Запишемо рівняння (15) у матричному вигляді:

$$Gx = \frac{\lambda}{2} e + \frac{\mu}{2} U \tag{16}$$

$$e^T x = 1 \tag{17}$$

$$U^T x = U_p \tag{18}$$

Рахуємо, що матриця коваріацій **G** не вироджена, отже існує до неї обернена матриця G^{-1} і розв'язок системи (16) у матричному вигляді буде такий:

$$x = \frac{\lambda}{2} G^{-1} e + \frac{\mu}{2} G^{-1} U \tag{19}$$

Підставимо цей розв'язок в (17) та (18) і отримаємо систему рівнянь :

$$\begin{cases} (e^T G^{-1} e)\frac{\lambda}{2} + (e^T G^{-1} U)\frac{\mu}{2} = 1 \\ (U^T G^{-1} e)\frac{\lambda}{2} + (U^T G^{-1} U)\frac{\mu}{2} = Up \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Крамера:

$$\frac{\lambda}{2} = \frac{1}{\Delta}[(U^T G^{-1} U) - U_p(e^T G^{-1} U)]$$

$$\frac{\mu}{2} = \frac{1}{\Delta}[(U_p(e^T G^{-1} U) - (U^T G^{-1} U)],$$ де

$$\Delta = (e^T G^{-1} e)(U^T G^{-1} U) - (U^T G^{-1} e)^2$$

Підставимо розв'язок в (19) і отримаємо структуру оптимального портфеля цінних паперів:

$$x^{opt} = \frac{1}{\Delta}\{[(U^T G^{-1} U) - U_p(e^T G^{-1} U)]G^{-1} e + [U_p(e^T G^{-1} e) - (U^T G^{-1} e)]G^{-1} U\} \tag{20}$$

Відповідна мінімальна дисперсія запишеться так:

$$D_p^{min} = (\sigma_p^{min})^2 = (x^{opt})^T G x^{opt} = \frac{1}{\Delta}[U_p^2(e^T G^{-1} e) - 2U_p(U^T G^{-1} e) + (U^T G^{-1} U)] \tag{21}$$

Якщо в знайденому розв'язку деякі $x_i^{opt} \le 0$, то виключаємо з портфеля відповідні цінні папери і розв'язуємо задачу спочатку.

Будемо вважати, що:

1. Всі середні прибутки цінних паперів різні (з двох цінних паперів з однаковим середнім прибутком і різними дисперсіями інвестор вибере цінний папір з меншою дисперсією). Тому перенумеруємо їх по спаданню середнього прибутку:

$$U_1 > U_2 > \ldots > U_n$$

2. Більшим середнім прибуткам відповідають більші дисперсії:

$$\sigma_1^2 > \sigma_2^2 > \ldots > \sigma_n^2$$

Тоді структура оптимального портфеля