

УДК 517.944

НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ В МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЯХ ПРИРОДОЗНАВСТВА

Надія Хома, Світлана Хома-Могильська

Тернопільський національний економічний університет, Тернопіль

При практичному знаходженні розв'язку крайової задачі для гіперболічного рівняння другого порядку

$$u_{tt} - u_{xx} = F(x, t, u), \quad 0 < x < \pi, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (2)$$

яка часто виникає при описі різних явищ в природознавстві, зокрема, в коливних системах [1], його часто шукають у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \quad (3)$$

що автоматично задовольняє крайові умови (2). Виникає питання: коли і при яких умовах крайова задача (задача без початкових умов) (1), (2) може мати розв'язок у вигляді (3)?

Якщо аналізувати результати XX століття про існування періодичних розв'язків крайової задачі (1), (2) [1-3], то можна виділити два основних висновки: 1) періодичний розв'язок $u(x, t + 2\pi)$ крайової задачі (1), (2) існує лише у вигляді (3) [2], а також у вигляді

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin kx, \quad (4)$$

де $u^0(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \sin kx$ — розв'язок однорідної

крайової задачі $u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = 0, \quad u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0$.

Виходячи з подання розв'язку (3) введемо такий клас функцій

$$\mathcal{Q}_{2\pi}^- = \{f : f(x, t) = -f(-x, t) = f(x + 2\pi, t)\}, \quad (5)$$

тобто клас непарних і 2π -періодичних функцій за просторовою змінною x . Легко довести, що для кожної непарної і 2π -періодичної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R})$ і $f(x, t) \in \mathcal{Q}_{2\pi}^- \cap C^{1,0}(\mathbf{R}^2)$ лінійна крайова задача

$$u_{tt} - u_{xx} = f(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbf{R}^2$$

має розв'язок (класичний), який описується формулою

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi \equiv u^o(x, t) + \tilde{u}_n(x, t). \quad (6)$$

Для доведення цього використано наступне твердження:

Лема. Для кожної функції $\mu(z) \in C^1(\mathbf{R})$ і $\mu(z + 2\pi) = \mu(z)$, яка розкладається у рівномірно збіжний ряд Фур'є

$$\mu(z) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kz + B_k \sin kz) \sin kx,$$

справджується подання

$$\frac{1}{2} \int_{z-x}^{z+x} \mu(\alpha) d\alpha - \frac{A_0}{2} x = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kz + b_k \sin kz) \sin kx, \quad (7)$$

де $a_k = A_k / k$, $b_k = B_k / k$, $k \in \mathbf{N}$.

Оскільки для непарної і 2π -періодичної функції $\mu(z)$ коефіцієнт $A_0 = 0$, то на основі подання (7) випливає, що інтеграл

$u^o(0, t) = \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \mu(\alpha) d\alpha$ є розв'язком однорідної крайової задачі

$u_{tt}^o - u_{xx}^o = 0$, $u^o(0, t) = u^o(\pi, t) = 0$. Тепер, використовуючи представлення (6) розв'язку лінійної неоднорідної задачі, можна знаходити наближені розв'язки для більш загальних як лінійних, так і нелінійних гіперболічних рівнянь другого порядку в класі функцій $Q_{2\pi}^-$ (зводячи їх до відповідних інтегральних рівнянь).

1. Митропольський Ю. О., Хома-Могильська С. Г. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку. I // Укр. мат. журн. - 2005. - Т. 57, № 7. - С. 912-921.
2. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных // Изв. АН СССР. Сер. мат. - 1937. - №1. - С. 15-50.
3. Rabinowitz P. Periodic solution of hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. - 1967. - Vol. 20, № 1. - P. 145-205.

APPROXIMATE SOLVING FOR SOME BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN MATHEMATICAL NATURAL HISTORY MODELS

Shoved explicitly how to solve by means of operator's equations the non-linear boundary value problems.