Галина СМАЛЮК

МАКСИМІЗАЦІЯ ДОХІДНОСТІ ПОРТФЕЛЯ РИЗИКОВИХ ЦІННИХ ПАПЕРІВ З ФІКСОВАНОЮ ДИСПЕРСІЄЮ ЗА УМОВИ РІВНОСТІ β-КОЕФІЦІЄНТІВ

Досліджено питання ефективного формування інвестиційного портфеля, що не містить безризикових активів. У разі, коли інвестора влаштовує рівень ризику, вищий від мінімального, досліджено задачу максимізації сподіваної дохідності портфеля за умови рівності β-коефіцієнтів

Концепція моделювання, формування та реалізації інвестиційного портфеля в умовах ризику найбільш розроблена та *висвітлена у роботах* [1 – 12], до якої ми приєднуємося і беремо за основу в даній статті. Оскільки окремі питання цієї концепції потребують проведення доволі широкого спектра досліджень, тому розглянемо актуальну тематику моделювання прийняття ризикових рішень щодо формування інвестиційного портфеля. Зокрема, *актуальною і нерозв'язаною* в явному вигляді є задача оптимізації дохідності портфеля ризикових цінних паперів з фіксованою дисперсією, яку визначають за моделлю Шарпа.

Дисперсію інвестиційного портфеля згідно з моделлю Шарпа [7] обчислюють за формулою:

$$D_p = \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right)^2 D_m + \sum_{i=1}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i}\ , \tag{1}$$

де D_m – систематичний ризик ринкового портфеля;

$D_{\varepsilon i}\ (i = \overline{1,n})$ – залишкова дисперсія дохідності i-го активу;

$\beta_j\ (j = \overline{1,n})$ – міра чутливості дохідності j-го активу до дохідності ринкового портфеля;

$x_i\ (i = \overline{1,n})$ – частки вкладень коштів в i-ті активи;

або, зважаючи на те, що

$$x_1 = 1 - \sum_{k=2}^{n} x_k, \tag{2}$$

співвідношення (1) можна записати так:

$$D_p = \left(\beta_1 + \sum_{j=2}^{n} (\beta_j - \beta_1) x_j \right)^2 D_m + \left(1 - \sum_{k=2}^{n} x_k \right)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{i=2}^{n} x_i^2 D_{\varepsilon i}. \tag{3}$$

При заданому рівні дохідності портфеля отримаємо:

$$\mu_p = \mu_1 + \sum_{j=2}^{n} (\mu_j - \mu_1) x_j, \tag{4}$$

де $\mu_j\ (j = \overline{1,n})$ – математичне сподівання дохідності j-го активу.

За умови рівності між собою β-коефіцієнтів ($\beta_1 = \beta_j,\ j = 2,...n$) співвідношення (3) можна записати, зарахувавши частку x_2 вкладення коштів до іншого активу:

$$D_p = \beta_1^2 D_m + \left(1 - \frac{\mu_p - \mu_1 - \sum\limits_{j=3}^{n}(\mu_j - \mu_1)x_j}{\mu_2 - \mu_1} - \sum_{j=3}^{n} x_j\right)^2 D_{\varepsilon 1} + \left(\frac{\mu_p - \mu_1 - \sum\limits_{j=3}^{n}(\mu_j - \mu_1)x_j}{\mu_2 - \mu_1}\right)^2 D_{\varepsilon 2} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j}. \qquad (5)$$

Передусім необхідно обчислити частинні похідні функції D_p за змінними x_i $(i = \overline{3,n})$:

$$\frac{\partial D_p}{\partial x_j} = 2\left(1 - \frac{\mu_p - \mu_1 - \sum\limits_{j=3}^{n}(\mu_j - \mu_1)x_j}{\mu_2 - \mu_1} - \sum_{j=3}^{n} x_j\right)\frac{\mu_j - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} D_{\varepsilon 1} -$$
$$- 2\frac{\mu_p - \mu_1 - \sum\limits_{j=3}^{n}(\mu_j - \mu_1)x_j}{(\mu_2 - \mu_1)^2}(\mu_j - \mu_1)D_{\varepsilon 2} + 2x_j D_{\varepsilon j}. \qquad (6)$$

Прирівнявши отримані похідні до нуля і розв'язавши отриману систему лінійних алгебраїчних рівнянь, можна знайти частки коштів x_i $(i = \overline{3,n})$, що мінімізують ризик портфеля при заданій дохідності (4).

Обернена задача полягає в максимізації дохідності портфеля (4) при заданому рівні ризику (3). Для того, щоб виразити величину x_2 з рівняння (3), запишемо його в такому вигляді:

$$[(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})x_2^2 - 2(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1}]x_2 + \beta_1^2 D_m + (1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j} - D_p = 0. \qquad (7)$$

Отримане рівняння (7) має дійсні розв'язки, якщо виконується нерівність:

$$D = [(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1}]^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m + (1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j} - D_p] \geq 0. \qquad (8)$$

За умови (8) рівняння (7) має розв'язок:

$$x_2 = \left([(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1}] + ([(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1}]^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m + (1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)^2 D_{\varepsilon 1} +\right.$$
$$\left. + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j} - D_p])^{\frac{1}{2}}\right)/(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}). \qquad (9)$$

Якщо розв'язок (9) – число в межах від 0 до 1, то дохідність портфеля можна виразити за допомогою формули:

$$\mu_p = \mu_1 + \sum_{j=3}^{n}(\mu_j - \mu_1)x_j + (\mu_2 - \mu_1)((1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1} + ((1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)D_{\varepsilon 1}^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})\times$$
$$\times[\beta_1^2 D_m - (1 - \sum_{j=3}^{n} x_j)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon 1} - D_p])^{\frac{1}{2}})/(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}). \qquad (10)$$

Функція (10) має (n-2) незалежні змінні $x_i \quad (i=\overline{3,n})$ та ($2n+3$) параметри:

$\mu_i \ (i=\overline{1,n}),\ D_{\varepsilon i} \ (i=\overline{1,n}),\ D_m,\ D_p,\ \beta_1$. Для дослідження критичних точок функції (10)

обчислимо її частинні похідні за змінними $x_i \quad (i=\overline{3,n})$:

$$\frac{\partial\mu_p}{\partial x_i}=\mu_i-\mu_1+\frac{(\mu_2-\mu_1)}{D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}}(-D_{\varepsilon 1}+([(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2 D_{\varepsilon 1}+$$
$$+\sum_{j=3}^{n}x_j^2 D_{\varepsilon j}-D_p])^{-\frac{1}{2}}(-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}{}^2-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon i}x_i])), \tag{11}$$

якщо дискримінант (8) додатний.

Прирівнявши отримані похідні до нуля, отримаємо систему з ($n-2$)-х ірраціональних рівнянь:

$$(\mu_3-\mu_1)(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})+(\mu_2-\mu_1)((D_{\varepsilon 1}[-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[-(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon i}x_i])\times$$
$$\times([(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)D_{\varepsilon 1}]^2-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m+(1-\sum_{j=3}^{n}x_j)^2 D_{\varepsilon 1}+\sum_{j=3}^{n}x_j^2 D_{\varepsilon j}-D_p])^{-\frac{1}{2}}-D_{\varepsilon 1})=0, \quad (i=\overline{3,n}). \tag{12}$$

Розглянемо спочатку випадок портфеля з n=3 активів. Система (12) складається тепер з одного рівняння:

$$(\mu_3-\mu_1)(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})+(\mu_2-\mu_1)((D_{\varepsilon 1}[-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}]-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[-(1-x_3)D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3}x_3])\times$$
$$\times([(1-x_3)D_{\varepsilon 1}]^2-(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m+(1-x_3)^2 D_{\varepsilon 1}+x_3^2 D_{\varepsilon 3}-D_p])^{-\frac{1}{2}}-D_{\varepsilon 1})=0. \tag{13}$$

Як видно з рівняння (13), функція від x_3 в його лівій частині є сталою лише у випадку, коли дохідності першого та другого активів рівні між собою: $\mu_1=\mu_2$. Для того, щоб ця стала дорівнювала нулю, потрібно, щоб і третій актив мав таку саму сподівану дохідність: $\mu_3=\mu_1$. Тоді, очевидно, інвестор вибере той актив, в якого найменший ризик: $\min\limits_{i=1,3}\{\beta_i^2 D_m+D_{\varepsilon i}\}$.

Розглянемо більш загальний випадок, коли $\mu_1\neq\mu_2$. Тоді рівняння (13) можна перетворити так:

$$[D_{\varepsilon 1}^2 x_3-D_{\varepsilon 1}{}^2-D_{\varepsilon 1}^2 x_3-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}x_3-D_{\varepsilon 2}(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 3})x_3+(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2})D_{\varepsilon 1}]/\sqrt{D}-D_{\varepsilon 1}=-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}). \tag{14}$$

У рівнянні (14) зведемо подібні доданки:

$$[-(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}+D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})x_3+D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}\ ]/\sqrt{D}-D_{\varepsilon 1}=-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}).$$

Останнє рівняння має таку структуру:

$$(Ax_3+B)/\sqrt{D}=D_{\varepsilon 1}-\frac{\mu_3-\mu_1}{\mu_2-\mu_1}(D_{\varepsilon 1}+D_{\varepsilon 2}),$$

де $A=-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3}-D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}$;

$B = D_{\varepsilon 1} D_{\varepsilon 2}$.

Якщо права частина рівняння (14) дорівнює нулю, тобто виконується рівність

$$D_{\varepsilon 1} = \frac{\mu_3 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}), \tag{15}$$

то дане рівняння стає лінійним:

$$-(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 2})x_3 + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} = 0. \tag{16}$$

Якщо коефіцієнт біля x_3 в рівнянні (16) відмінний від нуля: $-D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} - D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} - D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 2} \neq 0$, то рівняння (16) має розв'язок:

$$x_3 = \frac{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}}{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}}, \tag{17}$$

а вираз (17), очевидно, задовольнятиме умову $0 < x_3 < 1$:

$$0 < \frac{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2}}{D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}} < 1. \tag{18}$$

Рівність (15) у цьому разі також набуде простішого вигляду:

$$(\mu_2 - \mu_1)D_{\varepsilon 1} = (\mu_3 - \mu_1)(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})$$

або

$$(\mu_2 - \mu_3)D_{\varepsilon 1} = (\mu_3 - \mu_1)D_{\varepsilon 2}.$$

У даному разі величина x_3 не залежить ні від β-коефіцієнтів, ні від ризику ринкового портфеля D_m, ні навіть від допустимого ризику портфеля D_p, а лише від залишкових дисперсій активів цього портфеля. Однак це не означає, що й інші частки x_2 чи x_1 також не залежать від багатьох параметрів. Справді, якщо підставити формулу (17) у розв'язок (9), то отримаємо:

$$\begin{aligned} x_2 = {} & (D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})/(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3}) + (D_{\varepsilon 1}^2(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2/(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + \\ & + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})[\beta_1^2 D_m + D_{\varepsilon 1}(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2/(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + \\ & + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2 + D_{\varepsilon 3}D_{\varepsilon 1}^2 D_{\varepsilon 2}^2/(D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 2} + D_{\varepsilon 1}D_{\varepsilon 3} + D_{\varepsilon 2}D_{\varepsilon 3})^2 - D_p])^{\frac{1}{2}})/(D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2}). \end{aligned} \tag{19}$$

Застосовуючи метод математичної індукції, можна довести, що у випадку портфеля з n активів визначник відповідної системи $(n-2)$-го порядку (12) обчислюють за формулою:

$$\det A_n = (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})^{n-3} \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1, j \neq i}^{n} D_{\varepsilon j}, \tag{20}$$

а отже, ця система має єдиний розв'язок для довільних значень n. Отриманий розв'язок системи (12) можна записати у вигляді:

$$x_j = B_j / d_n + c_j,\ j = \overline{3, n}, \tag{21}$$

де обчислені величини B_j, c_j залежать від параметрів портфеля $(\mu_1, ..., \mu_n,\ D_m, D_{\varepsilon 1}, ... D_{\varepsilon n})$, але не від допустимого ризику портфеля D_p. Від D_p залежить величина d_n, бо

$$d_n = \left(\left[\left(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j\right) D_{\varepsilon 1}\right]^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})\left[\beta_1^{\,2} D_m - \left(1 - \sum_{j=3}^{n} x_j\right)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n} x_j^2 D_{\varepsilon j} - D_p\right]\right)^{-\frac{1}{2}}, \qquad (22)$$

яку можна знайти з рівняння (22), підставивши у нього формулу (21):

$$d_n = \left(\left[\left(1 - \sum_{j=3}^{n} (B_j / d_n + c_j)\right) D_{\varepsilon 1}\right]^2 - (D_{\varepsilon 1} + D_{\varepsilon 2})\left(\beta_1^{\,2} D_m + \left(1 - \sum_{j=3}^{n} (B_j / d_n + c_j)\right)^2 D_{\varepsilon 1} + \sum_{j=3}^{n} (B_j / d_n + c_j)^2 D_{\varepsilon j} - D_p\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad (23)$$

Після піднесення до квадрату і зведення до спільного знаменника рівняння (23) зводять до квадратного, з якого при додатності дискримінанта можна знайти невідоме значення d_n.

Для портфеля, що не містить безризикового активу, при заданому рівні його дисперсії згідно з моделлю Шарпа знайдено частки вкладень (21) в його активи, що дають змогу максимізувати дохідність інвестиційного портфеля. Модель допомагає приймати рішення про формування інвестиційного портфеля, всі активи якого ризикові, з урахуванням заданого рівня дисперсії самого портфеля й одночасно досягнути максимальної дохідності.

У подальших дослідженнях плануємо дослідити випадок відмінних між собою β-коефіцієнтів.

Література

1. *Вітлінський В. В., Наконечний С. І. Ризик у менеджменті. – К.: ТОВ Борисфен-М, 1996. – 226 с.*
2. *Волошин И. Измерение концентрационных рисков с помощью теории портфелей // Финансовые риски. – 1998. – № 3. – С. 94 – 99.*
3. *Литвиненко С. Н., Поддубный В. И. К выбору эффективного инвестиционного портфеля // Фондовый рынок. – 1998. – № 16 – С. 18 – 20.*
4. *Мертенс А. В. Инвестиции: Курс лекций по современной финансовой теории. – К.: Киевское инвестиционное агентство, 1997. – 416 с.*
5. *Пересада А. А. Інвестиційний процес в Україні. – К.: Лібра, 1998. – 392 с.*
6. *Петраков Н. Я. Инвестиционно-финансовый портфель. – М.: Соминтек, 1993. – 52 с.*
7. *Шарп У., Александер Г., Бейли Дж. Инвестиции / Пер. с англ. – М.: ИНФРА-М, 1997. – 1024 с.*
8. *Шевчук В. Я., Рогожин П. С. Основи інвестиційної діяльності. – К.: Генеза, 1997. – 384 с.*
9. *Alexander J., Francis C. Portfolio Analysis. – Prentice Hall, 1986. – 512 p.*
10. *Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. – № 7 (March 1952). – P. 77 – 91.*
11. *Markowitz H. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment. – New York: John Wiley, 1959. – 319 p.*
12. *Tobin J. The of Portfolio Selection. – London: Macmillan and Co., 1965. – 445 p.*