Лекція 1.

ПРИНЦИПИ МОДЕЛЮВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ І ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

Динамічною називається система, параметри якої явно або неявно залежать від часу. З цього визначення випливає, що якщо для поведінки системи визначені функціональні рівняння, то в них включаються в явному вигляді змінні, що відносяться до різних моментів часу.

Розглянемо найважливіші властивості складних динамічних систем.

1. Цілісність (емерджентність).

В системі окремі частини функціонують спільно, утворюючичи в сукупності процес функціонування системи як цілого. Сукупне функціонування різнорідних взаємозв'язаних елементів породжує якісно нові функціональні властивості цілого, що не мають аналогів у властивостях його елементів. Це означає принципове неспівставлення властивостей системи до суми властивостей її елементів.

2. Взаємодія із зовнішнім середовищем.

Система реагує на дію навколишнього середовища, еволюціонує під цією дією, але при цьому зберігає якісну визначеність і властивості, що відрізняють її від інших систем.

3. Структура.

При дослідженні системи структура виступає як спосіб опису її організації. Залежно від поставленої задачі дослідження проводиться декомпозиція системи на елементи і вводяться зв'язки між ними, істотні для вирішуваної проблеми, Разом з тим декомпозиція системи на елементи і зв'язки визначається внутрішніми властивостями даної системи. Структура динамічна по своїй природі, її еволюція в часі і просторі відображає процес розвитку систем.

4. Нескінченність пізнання системи.

Під цією властивістю розуміється неможливість повного пізнання системи і всестороннього уявлення кінцевою безліччю описів, тобто кінцевим числом якісних і кількісних характеристик. Тому система може бути представлена нескінченним числом структурних і функціональних варіантів, що відображають різні аспекти системи.

5. Ієрархічність системи.

Кожний елемент в декомпозиції системи може розглядатися як цілісна система, елементи якої, у свою чергу, можуть бути також представлені як системи. Але, з другого боку, будь-яка система — лише компонент більш широкої системи.

6. Елемент.

Під елементом розуміється якнайменша ланка в структурі системи, внутрішня будова якого не розглядається на вибраному рівні аналізу. Відповідно до властивості 5 будь-який елемент є системою, але на вибраному рівні аналізу ця система характеризується тільки цілісними характеристиками.

Цілісність, структура, елемент, нескінченність і ієрархічність, складають ядро понять загальної теорії систем і є основою системного представлення об'єктів і формування концепцій системних досліджень.

Проте для більш докладного вивчення властивостей динамічних економічних систем (ЕС) необхідно розглянути ще ряд найважливіших властивостей і характеристик.

1. Стан системи. Стан системи визначається станами її елементів. Теоретично можливий набір станів рівний числу можливих поєднань всіх станів елементів. Проте взаємодія складових частин приводить до обмеження числа реалізовуваних поєднань. Зміна стану елемента може відбуватися неявно, безперервно і стрибкоподібно.

2. Поведінка системи. Під поведінкою системи розуміється закономірний перехід з одного стану в інший, обумовлений властивостями елементів і структурою.

Безперервність функціонування. Динамічним системам властива безперервність функціонування. Система існує, поки функціонують соціально-економічні і інші процеси в суспільстві, які не можуть бути перервані, інакше система перестане функціонувати. Всі процеси в ЕС, як в живому організмі, взаємозв'язані. Функціонування частин визначає характер функціонування цілого, і навпаки. Функціонування системи пов'язано з безперервними змінами, накопичення яких приводить до розвитку.

4. Розвиток системи. Життєдіяльність складної системи є постійною зміною фаз функціонування і розвитку, яка виражається в безперервній функціональній і структурній перебудові системи, її підсистем і елементів.

Еволюція економічних систем визначається одним з найважливіших властивостей складних систем — здібністю до саморозвитку. Центральним джерелом саморозвитку є безперервний процес виникнення і вирозвязок протиріч. Розвиток, як правило, пов'язаний з ускладненням системи, тобто із збільшенням її внутрішнього різноманіття.

5. Динамічність. Економічна система функціонує і розвивається в часі, вона має передісторію і майбутнє, характеризується певним життєвим циклом, в якому можуть бути виділений певні фази: виникнення, зростання, розвиток, стабілізація, деградація, ліквідація або стимул до зміни.

6. Складність. Економічна система характеризується великим числом неоднорідних елементів і зв'язків, поліфункціональністю, поліструктурністю, багатокритеріальністю, багатоваріантністю розвитку і властивостями складних систем.

7. Гомеостатичність. Гомеостатичність відображає властивість системи до самозбереження, протидія руйнуючим діям середовища.

8. Цілеспрямованість. Всім динамічним системам в економіці властива цілеспрямованість, тобто наявність певної метиі прагнення до її досягнення. Розвиток системи пов'язаний саме із зміною мети.

9. ***Керованість***. Свідома організація цілеспрямованого Функціонування системи і її елементів називається ***керованістю***. В процесі життєдіяльності система за допомогою цілеспрямованого управління дозволяє постійно виникаючі в ній суперечності і реагує на зміну внутрішніх і зовнішніх умов свого існування. Відповідно до умов, що змінюються, вона міняє свою структуру, коректує мету розвитку і зміст діяльності елементів, тобто відбувається цілеспрямована самоорганізація системи, яка на практиці реалізує здібність до саморозвитку. Однією з основних функцій самоорганізації є збереження в процесі еволюції системи її якісної визначеності.

Властивості керованості виявляються також в таких особливостях, як відносна автономність і функціональна керованість.

Відносна автономність функціонування економічних систем означає, що в результаті дії зворотного зв'язку кожна з складових вихідного сигналу може бути змінена за рахунок зміни вхідного сигналу, причому інші складові залишаються незміненими.

Функціональна керованість економічної системи означає, що відповідним вибором вхідної дії можна добитися будь-якого вихідного сигналу.

10. Адаптивна. Адаптивна економічної системи визначається двома видами адаптації — пасивної і активної. Пасивна адаптація є внутрішньо, властивою характеристикою економічної системи, яка має свій в розпорядженні певні можливості саморегулювання. Активна адаптація представляє механізм адаптивного управління економічної системи і організацію його ефективного здійснення.

11. Інерційність. Інерційність економічної системи позначається у виникненні запізнювання в системі, симптоматично реагуючої на обурюючі і управляючі дії. Такі запізнювання враховуються, зокрема, за допомогою лагів, що включаються в моделі опису систем. Розрізняють внутрішні лаги, або лаги ухвалення рішень, відносно стабілізуючих дій, і зовнішні лаги, що відображають затриману реакцію системи на з відповідаючі дії.

12. Стійкість. Система признається стійкою відносно введеного околу, якщо при достатньо рисих змінах умов функціонування її поведінка істотно не змінюється. В рамках теорії систем досліджуються структурна стійкість і стійкість траєкторії поведінки системи. Стійкість ЕС забезпечується такими аспектами самоорганізації, як диференціація

і лабільність (чутливість). Диференціація - це прагнення системи до структурної і функціональної різноманітності елементів, яка забезпечує не тільки умови виникнення і вирозвязок протиріч, але і визначає здатність системи швидко пристосовуватися до наявних умов існування. Лабільність означає рухливість функцій елементів при збереженні стійкості структури системи в цілому.

13. ***Стан рівноваги***. Стійкість системи пов'язана з її прагненням до стану рівноваги, яка припускає таке функціонування елементів системи, при якому забезпечується підвищена ефективність руху до мети розвитку. В реальних умовах система не може повністю досягти стану рівноваги, хоча і прагне його. Елементи системи функціонують по-різному в різних умовах, і їх динамічна взаємодія постійно впливає на рух системи. Система прагне рівноваги, на це направлені зусилля управління, але, досягаючи його, вона тут же від нього йде. Таким чином, стійка економічна система постійно знаходиться в стані динамічної рівноваги, вона безперервно коливається щодо положення рівноваги, що є не тільки її специфічною властивістю, але і умовою безперервного виникнення суперечностей як рушійних сил еволюції.

1.2. ФОРРИСЬНЕ ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

Форрисьно динамічна система в загальному вигляді може бути задана наступним кортежем:

M=<T,Ф,X,Ω*,V,Y,G,R*>

Властивості динамічної системи задаються наступними аксіомами:

1. Для системи S задана множина моментів часу T, макрофункція системи Ф, множина вхідних дій X, множина обурень Ω, множина станів V, множина значень вихідних величин У, структура системи G і відносини эмерджентности R.

2. Множина T є деяка впорядкована підмножина безлічі дійсних чисел, безліч моментів часу, в які вивчається система, що є.

3. Макрофункція системи визначається за допомогою двох функцій:

$S : X \rightarrow Y$ *и* $V : X \times Y \rightarrow C,$

де S — функціональна модель об'єкту, V — функція якості, або оціночна, функція, З - безліч оцінок. Макрофункція системи визначається парою *Ф = (S, V).*

4. Безліч обурень Q, або безліч неопределенностей, є безліччю всіх можливих дій, які позначаються на поведінці системи. Якщо така множина Ω не порожньо, тобто $\Omega \neq 0$, то функціональна модель об'єкту приймає вигляд:

$S : X \times \Omega \rightarrow Y,$

а оцінна функція

$V : X \times \Omega \rightarrow Y > C.$

Існує перехідна функція стану

$\varphi = \Phi \times \Phi \times V \times X \rightarrow V,$

значеннями якої служать стани $u(t) = \varphi(t, \tau, u, x) \in V$, в яких опиняється система у момент часу t $\in$ T, якщо в початковий момент τ < t вона знаходилася в змозі $u(\tau) \in V$ протягом відрізка [[τ, t] на неї діяли вхідні дії x $\in$ *X.*

Задано вихідне відображення

$\eta : T \times V \rightarrow Y,$

визначаюче вихідні величини $y(t) = \eta(t, u(t)).$

Пару ((τ ,u), де $\tau \in T$, і $u \in V$, називають станом, або *фазовими координатами системи* S, а множина TxV— простором станів системи.

Кінцевий набір станів системи $t_1, t_2 \in T$, що задається перехідною функцією φ і визначений на деякому тимчасовому відрізку [tt_1, t2], називається *траєкторією* поведінки системи на інтервалі [tt_1, t2] за заданих початкових умов.

Кажучи про рух системи, ми матимемо на увазі траєкторію поведінки даної системи. Сукупність траєкторій системи, які відповідають різним (всім можливим) її початковим станам, називаються фазовим портретом системи.

Розрізняють три типи, або режиму поведінки системи: рівноважний, перехідний і періодичний.

Під *стійкістю* системи розуміється збереження його стану незалежно від зовнішніх обурень.

При вивченні поведінки динамічних систем важливим є дослідження характеру перехідних процесів. Перехідний процес - це процес зміни в часі координат динамічної системи при її переході з одного сталого стану в інший під дією прикладеного обурення, що змінює стан, структуру або параметри системи, або унаслідок ненульових початкових умов. Важливими характеристиками динамічної системи є тривалість і характер перехідного процесу.

В безперервних системах, як правило, сталий режим (тобто режим стійкого функціонування), досягається за нескінченно великий час. Залежно від характеру в безперервних системах: розрізняють коливальний і монотонний перехідний процес.

Для дискретних систем перехідний процес можна визначити як послідовність станів, викликаних зовнішньою обурюючою дією, яку система проходить за постійних умов, до її повернення в сталий режим функціонування.

До понять рівноваги і стійкості примикає поняття циклу в перетворенні системи.

Циклом називається така послідовність станів системи, при якій повторна зміна перетворень примушує систему проходити повторно цю послідовність.

На підставі знань про перетворення, пов'язане з системою, вивчаються стани рівноваги, перевіряється, чи зміниться стан системи, підданої яким-небудь діям, чи є стан рівноваги системи достатньо стійким, і якщо так, то який режим поведінки системи, що вивчається. Якщо заданий деякий стан (або стани) і конкретні обурення, то аналізується, чи повернеться система після зсуву в свою початкову область. Для безперервних систем розглядається питання, чи є вона стійкої проти всіх обурень всередині певної області значень.

Більш загальним є опис систем за допомогою набору функцій: перехідної, передавальної і імпульсної. На відміну від приведеного вище, цей спосіб придатний для опису безперервних систем, що складаються з безлічі елементів.

Перехідна функція — це функція, що відображає реакцію динамічної системи на вхідний сигнал за нульових початкових умов. Перехідна функція є важливою характеристикою системи, повністю визначаючої її динамічні властивості. Знаючи перехідну функцію h(t), можна визначити сигнал y(t) на виході системи при подачі у момент часу t0 = 0 на її вхід сигналу x(t):

$$y(t) = x(0) \times h(t) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h(t-\tau) d\tau.$$

Передавальна функція — це функція, що є відношенням перетворення Лапласа У(р) вихідної координати y(t) лінійної динамічної системи (або окремої ланки) до перетворення Лапласа Х(р) її вхідної координати x(t) за нульових початкових умов: W(p)= У(р)/Х(р). Передавальна функція лінійних фізично реалізовуваних динамічних систем з постійними параметрами є дробово-раціональними функціями параметра перетворення Лапласа р.

Передавальні функції — зручний опис властивостей лінійної системи автономного управління. Дослідження коренів передавальної функції (нулів і полюсів) повністю визначає всі динамічні властивості системи (стійкість і ін.).

Імпульсна функція задає вхідний сигнал, що поступив в систему. Вона може мати, наприклад, східчастий вигляд, одиничну дію і т.п.

Для лінійних динамічних систем імпульсна функція g(t) і передавальна функція w (p) пов'язана з перехідною функцією h (t) співвідношеннями:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt}, \;\; h(t) = \frac{1}{2p} \int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{pt} dp \, .$$

$\int_{c-iw}^{c+iw} \frac{w(p)}{p} e^{pt} dp$ де з — компоненту абсолютної збіжності.

2.2. ОПИС ЯКІСНИХ ЗМІН В ДИНАМІЧНИХ БЕЗПЕРЕРВНИХ СИСТЕМАХ

В загальному випадку поведінка складної системи описується сукупністю интегро-диференціальних рівнянь різних порядків.

Основним способом опису динаміки безперервних економічних систем є використовування апарату диференціальних рівнянь.

Диференціальне рівняння — це рівняння, що містить невідому функцію однієї або декількох змінних; незалежні змінні і похідні невідомій функції по незалежних змінних.

Вирішити диференціальне рівняння означає знайти всі невідомі функції, що обертають рівняння в тотожність. В загальному випадку невідомі функції визначаються диференціальним рівнянням неоднозначно (якщо розвязок взагалі існує), тому на шукані функції часто накладають додаткові умови. Існує певна класифікація типів диференціальних рівнянь, що дозволяє визначити способи знаходження аналітичних рішень диференціальних рівнянь.

Розглянемо основні поняття теорії диференціальних рівнянь.

Звичайним диференціальним рівнянням порядку r називається рівняння вигляду:

$$F[x, y(x), y'(x), ..., y^{(r)}(x)] = 0,$$

де r - порядок старшої похідної, що входить в рівняння. Дане рівняння представлено в неявній формі.

Під диференціальним рівнянням в явній формі розуміють диференціальне рівняння, дозволене щодо старшої похідної:

$$y^{(r)}(x) = f[x, y(x), y'(x), ..., y^{(r-1)}(x)].$$

Під розвязком диференціального рівняння розуміють знаходження функції у (х), яка задовольняє цьому рівнянню. При цьому сама функція у(х) називається розвязокм диференціального рівняння.

Дане співвідношення є, по суті, розвязокм диференціального рівняння щодо невідомої функції y(t).

Загальне розвязок звичайного диференціального рівняння порядку r має вигляд:

$$y = y(x, c_1, ..., c_r),$$

де с— довільні постійні.

Важливим в класифікації типів диференціальних рівнянь є поняття автономності. Якщо диференціальне рівняння не містить явно незалежну змінну, якою є час, то воно називається автономним диференціальним рівнянням. В цьому випадку поведінка розвязок залежить тільки від стану системи і не залежить від часу. Будь-яке неавтономне рівняння може бути перетворено в автономну систему диференціальних рівнянь за допомогою введення нової невідомої змінної.

На відміну від звичайних диференціальних рівнянь диференціальні рівняння в приватних похідних не знайшли ще свого застосування в моделюванні економічних систем.

Для опису дискретних динамічних систем, тобто таких, поведінка яких розглядається в дискретні моменти часу, застосовуються кінцево-різницеві рівняння. Що входять в їх склад кінцеві різниці є дискретним аналогом похідних.

Якщо відомий ряд спостережень за деякою величиною $y_1, y_2, ..., y_t, ..., y_\tau$, то кінцевою різницею 1-го порядку називається

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}.$$

Кінцево-різницеве рівняння включає кінцеві різниці різних порядків і може бути приведений до вигляду:

$$f(y_t, y_{t-1}, ..., y_{t-r}, c) = 0.$$

Кінцево-різницеві рівняння часто застосовуються в тих випадках, коли систему можливо спостерігати лише в певні моменти часу. Така ситуація типова для економіки, де практично всі величини вимірюються з деякою періодичністю, тобто в строго певні моменти.

Застосування якісної теорії до аналізу динамічних систем при вивченні соціально-економічних явищ не достатньо поширено і носить епізодичний характер. Задача якісного методу — отримання якісного результату, тобто характерних рис всього явища відразу і, частково, прогнозування явища. Математична частина якісного дослідження системи полягає в зіставленні фазового портрета реальним соціально-економічним процесам або об'єктам разом з проведенням аналізу. При цьому повний якісний аналіз виникаючих систем рівнянь проводити, виявляється, немає необхідності, оскільки властивості реального об'єкту встановлюють обмеження як на фазове розвязок, так і на рівняння. В деяких випадках виявляється достатнім тільки знання області стійкості, положення рівноваги і їх економічної інтерпретації. Останніми роками в якісній теорії зріс інтерес до нової якісної структури, так званої дивної аттрактору, з якою пов'язують модель хаосу.

Розділ 2

РІВНОВАГА І СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

2.1. РІВНОВАГА І СТІЙКІСТЬ

Економічна динаміка, що вивчає поведінку складних динамічних систем в економіці, не може обійти увагою такий важливий напрям, як стійкість і рівновага систем. Теорія стійкості зобов'язана своїм виникненням працям А. Пуанкаре і М. Ляпунова. В сучасних теоріях рівновазі в соціально-економічних системах надається особливе значення, пов'язане з поняттям справедливості, відсутністю соціальних потрясінь і т.д. В цьому розділі ми розглянемо спочатку деякі інтуїтивні обгрунтовування понять «рівновага» і «стійкість», а потім їх форрисьне уявлення.

Всяка динамічна система у будь-який момент часу характеризується своїм станом і напрямом руху. Система скоює рух або під впливом внутрішніх спонукальних причин, або в результаті впливу на неї зовнішнього середовища. Принципово різними є причини, що обумовлюють її рух як в початковий момент часу, так і в подальші моменти.

Із станом системи пов'язано поняття рівноваги. Під *рівновагою* розуміється стан, що зберігається скільки завгодно довго за відсутності зовнішніх дій. Таким чином, *рівноважний стан* системи — цей такий її стан, з якого система не вийде під дією тільки внутрішніх причин (іншими словами, немає таких внутрішніх сил, які б прагнули і були в змозі змінити стан рівноваги). Очевидний приклад — рівновага на ринку деякого товару, рівновага політичних сил в суспільстві. Напрям руху системи задається нульовим вектором, тобто рух відсутній.

Якщо система не знаходиться в стані рівноваги, то вона скоює ненульовий рух під впливом внутрішніх причин. При цьому можливо, звичайно, і зовнішній вплив на систему, проте першопричиною зміни її стану є саме внутрішні умови її існування. Наприклад, система, що випускає на ринок нову продукцію, не знаходиться в стані рівноваги оскільки всі умови її існування і зусилля якраз і направлені на зміну існуючого положення. А ось виробничо-економічна система, продукція якої знаходиться у стадії насиченого попиту, швидше знаходиться в стані рівноваги, оскільки об'єм випуску її не змінюється доти, пакунка не буде прийнято відповідне розвязок. В даному випадку ухвалення розвязок про випуск нової продукції або модифікації старої є по відношенню у виробничій системі зовнішнім елементом, що генерується управляючою системою.

Під впливом зовнішніх дій рівновага може бути порушений, і система перейде в інший стан. В цьому випадку в дію вступає друга характеристика динамічної системи *поведінка.* Залежно від будови системи, властивостей її і становлячих її елементів поведінка може істотно розрізнятися. Принципово різними виявляються два варіанти розвитку подій після того, як на систему зробило деякий обурюючий вплив зовнішнє середовище: повернення в початковий стан (може бути при нескінченному періоді розгляду) і подальше видалення від початкового стану. Ці можливості описуються поняттям стійкості.

Під стійкістю розуміється здатність системи повертатися в рівноважний стан у випадку, якщо вона була виведена з нього. У такому разі стан рівноваги називається *стійким.* Другому варіанту відповідає нестійкість стану і системи.

Таким чином, в заданий момент часу система може знаходитися в стані рівноваги, і у такому разі часто говорять про рівноважну систему, або знаходитися в стані неравновесия (нерівноважна система). У свою чергу рівновага може бути стійкою і нестійкою і, відповідно, розділяють стійкі і нестійкі системи.

Поняття стійкості застосовується також і по відношенню до руху системи, а саме — як властивість системи риса відхилятися від заданої траєкторії руху при рисих обурюючих впливах з боку зовнішнього середовища. В цьому значенні можна гово-0Ъ *про* динамічну стійкість.

Нарешті, поведінка системи також може бути схильний деяким змінам в часі. Цій можливості відповідає поняття стаціонарності. Стаціонарність *є* властивістю поведінки, процесів, що відбуваються в системі, і означає, що характер (закон) функціонування системи не змінюється з часом. Так, функціонування виробничо-економічної системи можна вважати стаціонарним, якщо технології виробництва не міняються протягом даного періоду. В цьому випадку систему можна описати за допомогою экономико-статистических моделей. Якщо ж відбувається зміна технологій виробництва, то закон функціонування міняється, наприклад, змінюються величини нормативної продуктивності ресурсів, і попередній закон функціонування виявляється недійсним. В перехідний період систему вже не можна описати за допомогою статистичних моделей, а слід привертати більш могутні математичні інструменти.

По аналогії з поняттями рівноваги і стійкості системи часто говорять про *стаціонарні* і *нестаціонарні* системи. В стаціонарній системі всі процеси, що відбуваються, стаціонарні, а в нестаціонарній існує хоча б один нестаціонарний процес.

Отже, слід розрізняти, до якої характеристики системи відносяться різні поняття. Рівновага є властивістю стану, стійкість — властивістю системи, а стаціонарність — властивістю процесів, що відбуваються в системі.

В літературі часто згадується поняття «стабільність». При цьому в різних джерелах під цим поняттям маються на увазі різні властивості. Слід помітити, що в іноземній літературі використовується єдиний термін — stability — стійкість, стабільність. Тому існування двох різних термінів в російськомовній (україномовної) літературі пояснюється швидше витратами перекладу, ніж дійсним розмежуванням цих понять. Виправданням існування цього терміну є те, що він, як правило, використовується як якісна, а не кількісна характеристика процесів, що відбуваються в системі, і означає поступальний, еволюційний шлях розвитку системи на противагу Революційному, вибуховому.

Складність і відвертість економічних систем пояснюють той факт, що рівновага і стійкість на практиці зустрічаються достатньо рідко. Проте ці поняття мають важливе значення для економічне теорії і дозволяють досліджувати внутрішні властивості систем.

Слід також помітити, що нелінійність в економічних системах породжує ускладнені варіанти рівноваги і стійкості про що піде мова в подальших розділах.

Для складних систем, зокрема економічних, стійкість означає, що при виникненні обурення, злегка що виводить систему із стану рівноваги, система прагнутиме відновлення колишнього стану, тобто все її подальші стани знаходитимуться поблизу (*стани* рівноваги рис. *4.1).*

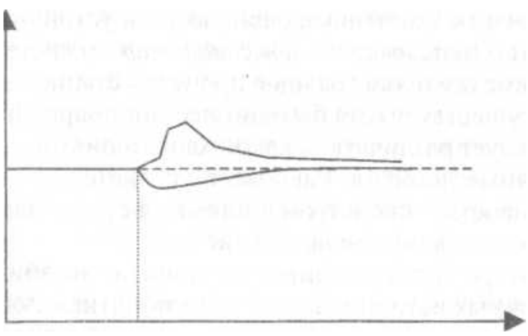


Рис. 2.1. Стійкість для динамічної системи

Форрисізація питань стійкості реалізується у вигляді декілька визначень:

Розглянемо систему, описувану диференціальним рівнянням (системою диференціальних рівнянь) вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}. \qquad (2.1)$$

Визначення 1. Система (4.1) називається *автономною,* якщо змінна часу t не входить в її праву частину безпосередньо. В осоружному випадку система називається *неавтономною.*

Припустимо, що функція *f(x,t)* володіє необхідними властивостями щоб система (4.1) риса єдине розвязок

$$x(t) = \varphi(t, t_0, x_0). \qquad (2.2)$$

Визначення 2. Стан системи називається *станом рівноваги* для системи (4.1), якщо

$$f(x_e, t) = 0, \quad \forall t \qquad (2.3)$$

або

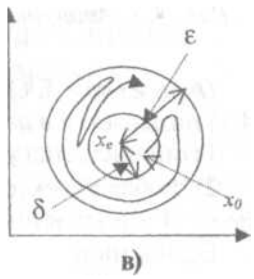
$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_e. \qquad (2.4)$$

Це визначення означає, що система сама по собі (за відсутності зовнішньої дії) не покине стан рівноваги.

Визначення 3. Стан рівноваги *xe* динамічної системи (4.1) називається *стійким по Ляпунову* (стабільним), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta(\varepsilon, t_0) > 0 : \; \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, t_0, x_0 - x_e\| \le \varepsilon, \;\; \forall t \ge t_0. \; (2.5)$$

Це визначення означає, що завжди можна вибрати таке початкове положення системи x_0 відмінне від стану рівноваги менш, ніж на δ, що всі точки траєкторії системи знаходитимуться від стану рівноваги не далі ε (*рис.24.2)*



а) б)

Рис. 2.2. Стійкість по Ляпунову

Визначення 4. Точка рівноваги x_e динамічної системи (4.1) називається *асимптотически стійкою,* якщо:

1) вона є стійкою в значенні визначення 3;

2) виконано

$$\forall m > 0 \;\; \exists T(m,t_0,x_0) > 0: \; \|x_0 - x_e\| \le r(t_0) \Rightarrow \|\varphi(t,t_0,x_0) - x_e\| \le m, \;\; \forall t \ge t_0 + T,$$

де *r(tQ)*> 0 - константа.

Таким чином, до асимптотически стійкої точки рівноваги сходиться при $t \to \infty$ будь-яка траєкторія, що починається істотно близько до неї *(рис. 2.3).*

Асимптотически стійка точка називається *аттрактором* («притягаюча»), а нестабільна — *репеллером (рис.24.4).*

Число *r(tQ)* називається *базисом аттрактора.*

Визначення 5. Стан рівноваги *хе* динамічної системи (2.1) називається *в цілому асимптотически стійким,* якщо

1) воно є стійким;

2) будь-яка траєкторія при $t \to \infty$ сходиться до *хе,* якщо $\|x_0 - x_e\| \le r,$

де *r* > 0 — постійне, достатньо велике число *(рис. 4.5).*

Якщо константи у визначеннях 3, 4, 5 ((δ, T, r) не залежать від *t0,* то говорять про однорідну *стійкість*.

Для простоти виклад надалі вважатимемо, що система (2.1) володіє нульовим розвязокм.

Теорема Ляпунова про стійкість.

Хай для системи (4.1) існує така функція *V(x)*, безперервно що диференціюється в околиці точки x = 0, що

1) *V*(0)= 0;

2) *V(x)*> 0 $x \ne 0$;

3) в області завдання системи (4.1), тоді розвязок *х* = 0 є стійким.

Теорема Ляпунова дозволяє також визначити необхідні умови стійкості систем, що параметризуються, зокрема, для загальної рівноваги Вальраса.

2.5. КЛАСИФІКАЦІЯ СТАНІВ РІВНОВАГИ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Оскільки повна класифікація станів рівноваги для систем довільного порядку практично неосуществима, розглянемо тільки системи другого порядку, тобто такі, які описується двома динамічними параметрами.

Розглянемо автономну систему другого порядку вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases}$$

Хай *M((* x_0 *, y0)* - стан рівноваги. Це означає, що

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0.$$

Позначимо

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

$$\sigma = P'_x(x_0, y_0) + Q'_y(x_0, y_0).$$

Стан рівноваги, для якої $\Delta \neq 0$ називається *простим.* Розглянемо наступні стани рівноваги:

1) Прості стани рівноваги.

Для стану рівноваги може бути складено характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) - \lambda & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0. \qquad (2.7)$$

Хай λ_1, λ_2 — корені характеристичного рівняння.

Стани рівноваги класифікуються залежно від того, чи є корені дійсними або комплексними числами, їх парності і знака.

2) Вузли.

Якщо λ_1, λ_2 — дійсні числа однакових знаків, тобто $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ або $\Delta > 0$ $\sigma^2 - 4\Delta > 0,$ той стан рівноваги називається вузлом:

А. Невырожденный вузол: $\lambda_1 \neq \lambda_2$

а) стійкий, якщо $\sigma < 0$

б) нестійкий, якщо $\sigma > 0$.

Б. Вырожденный вузол: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

а) стійкий, якщо $\lambda < 0$ *;*

б) нестійкий, якщо $\lambda > 0$.

В. Дикритический вузол: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ і система може бути приведений до вигляду

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + \phi(x, y) \\ \dot{y} = \lambda y + \psi(x, y) \end{cases}$$

а) стійкий, якщо $\lambda < 0$ *;*

б) нестійкий, якщо $\lambda > 0$

4) Сідло.

Характеристичні корені λ_1, λ_2 — дійсні числа різних знаків, тобто $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ або Δ < 0 $\sigma^2 - 4\Delta > 0,$

Сепаратрісой сідла називається траєкторія, яка прагне сідла при $t \to \infty$. Вся решта траєкторій, скільки завгодно близькі до сепаратрисе, при зростанні *t* віддаляється від неї.

4) *Фокус.*

Характеристичні корені λ_1, λ_2 - комплексні зв'язані числа, тобто $\Delta > 0$ $\sigma^2 - 4\Delta < 0$, $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$

а) стійкий, якщо $\alpha < 0$ (($\sigma < 0$)*;*

б) нестійкий, якщо $\alpha > 0$ (($\sigma > 0$)*;*

в) центр - стійкий, але не асимптотически, якщо $\alpha = 0$

Складні стани рівноваги мають місце у разі, коли одне або більш характеристичних значення звертаються в нуль. Вони є предметом вивчення теорії катастроф. Ситуації рівноваги є комбінаціями перерахованих вище варіантів і можуть бути сідлом-вузол, складним сідлом, вони можуть мати декілька областей збіжності і расходимости в околиці даної точки **і** т.д. Тут ми наведемо лише приклади фазових портретів в околицях таких станів рівноваги .

3. НЕСТІЙКІСТЬ І НЕЛІНІЙНІСТЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

3.1. БІФУРКАЦІЇ В НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

В рамках класичного підходу до моделювання економічних систем розглядаються лінійні системи, в яких рисим сигналам на вході відповідає риса реакція на виході. Інтерес постнеклассической науки, парадигматика якій багато в чому закладається термодинамікою нерівноважних процесів, зміщується у бік нелінійних систем, більш властивих природі.

«Нелінійність» — фундаментальний концептуальний вузол нової парадигми, яку можна назвати також парадигмою нелінійності. Більш того, в науковому середовищі з'явився вираз «нелінійне мислення».

В математичному значенні нелінійність означає певний вид рівнянь, що містять шукані величини в ступенях більше одиниці або коефіцієнти, залежні від властивостей середовища. Нелінійні рівняння можуть мати дещо (більш одного) якісно різних рішень.

Звідси виникає фізичне значення нелінійності: безліч рішень нелінійного рівняння відповідає безліч шляхів еволюції системи, описуваної цими рівняннями (нелінійної системи).

Більш того, вивчаючи різні стадії розвитку процесів у відкритому нелінійному середовищі, можна чекати якісна зміна картини процесів, у тому числі переструктурирование — ускладнення і деградацію організації середовища. Причому це відбувається не при зміні параметрів середовища, а як результат саморозвитку процесів в ній.

В світоглядному плані нове осмислення нелінійності відобразилося в цілому ряді наукових ідей:

- ідеї багатоваріантності, альтернативності шляхів еволюції.
- ідеї вибору з даних альтернатив;
- ідеї темпу еволюції (швидкості розвитку процесів в середовищі.
- ідеї безповоротності еволюції.

Феномен нелінійності можна охарактеризувати наступні особливостями.

1. Завдяки нелінійності має силу найважливіший принцип «розростання рисого», або «посилення обурень». За певних умов нелінійність може усилювати обурення, тобто робити рису відмінність великою, макроскопічним по наслідках.

2. Певні класи нелінійних систем демонструють іншу важливу властивість - порогову чутливість. Нижче за поріг все зменшується, забувається, не залишає ніяких слідів в природі, науці, культурі, а вище за поріг, навпаки, багато разів посилюється.

3. Нелінійність породжує якусь подібність квантового ефекту дискретність шляхів еволюції нелінійних систем (середовищ). Тобто, на даному нелінійному середовищі можливий

зовсім не будь-який шлях еволюції, а лише певний спектр цих шляхів.

4. Нелінійність означає можливість несподіваних, так званих эмерджентных змін напряму перебігу процесів. Нелінійність процесів робить принципово ненадійним і недостатнім прогнози.

З нелінійністю, крім того, зв'язано уявлення про можливість на певних стадіях надшвидкого розвитку процесів. В основі механізму такого розвитку лежить нелінійний позитивний зворотний зв'язок. Негативний зворотний зв'язок дає стабілізуючий афект, примушуючи систему повернутися до стану рівноваги. Позитивний зворотний зв'язок, усилюючи відхід системи від рівноваги, повинна приводити лише до нестійкості і, здавалося б, до руйнування системи.

Як видно з попереднього викладу, використовування нелінійних моделей динаміки складних систем починалося в природних науках (фізиці, хімії, біології), але потім захопило і науки, що вивчають життєдіяльність людського суспільства. В даний час спостерігається зростання інтересу економістів до нелінійних моделей, зокрема, адаптації фізичних (достатньо добре вивчених) моделей до економічних процесів. Свідоцтвом цьому є виникнення такого напряму, як эконофизика (econophysics*)* застосування теорії еволюції біологічних організмів до моди.

Далі ми розглянемо методи математичного моделювання, реалізовуючі принципи синергетики і нелінійності.

Одним з основних результатів нелінійного підходу є визнання можливості багатоваріантного розвитку систем, наявності бифуркации. Розглянемо декілька прикладів, що пояснюють виникнення і єство бифуркации.

Приклад 3.1. Розглянемо наступну динамічну систему

$\dot{x} = f(x) = r + x^2.$

Випадок 1

Якщо $r<0$, ми маємо дві точки рівноваги:

перша точка $(-\sqrt{r})$ - стійка, оскільки $f(-\sqrt{r}) = -2\sqrt{r} < 0$;

друга точка $(\sqrt{r})$ - нестійка, оскільки $f(\sqrt{r}) = 2\sqrt{r} > 0$;

Це ж показує фазовий графік (*рис. 3*.1).

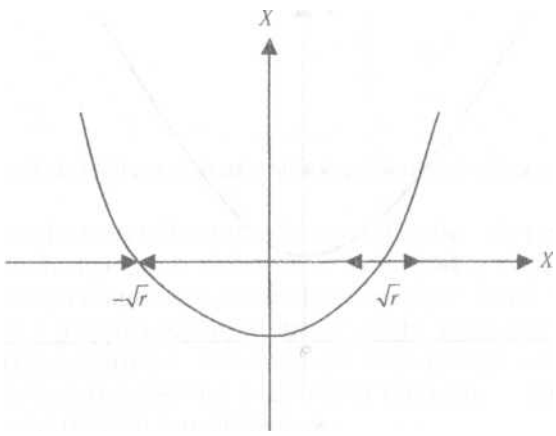


Рис. 3.1. Фазовий графік. *Випадок 1.*